
Osztályozási modellek – hierarchikus rendszerek

VARSICS ZITA

Az iskolákban kialakult tantárgyi struktúrákat, az egyes tantárgyak tematikáját időnként célszerű újragondolni. Az oktatási rendszer struktúráját érintő kérdésekben hosszabb időszakra szóló, stabil megoldásokat kell találni, különben a gyakori változtatási szándékok vagy az oktatási rendszer labilitását veszélyeztetik, vagy a pedagógustársadalomban meglevő nagy időállandó, tehetetlenség miatt kudarcba fulladnak. Az új oktatási törvénytől és a NAT-tól is ilyen elvárásaink lennének. Az egyes NAT-alternatívák mellett és ellen felhozott érvek azt jelzik, hogy még nem sikerült optimálisnak tekinthető megoldást találni. Az alábbiakban a matematika tanításával kapcsolatban vázolom fel néhány problémámat és elképzelésemet.

Még a szakemberek véleménye is jelentősen eltér annak megítélésében, hogy mennyi és milyen matematikát kell tanítani. Veres László egyik tanulmányában (1) például egy közel 50%-os óraszámcsökkentést eredményező lehetőséget vázol fel, amit többen me-reven elutasítanak. (2) Reimann József (3) külön fejezetet szentel a matematikatanítás időigényének, részletesen érvel a matematika emelt óraszám igénye mellett.

A hivatkozott cikkeket áttekintve megállapítható, hogy még diplomatikus megfogalmazás szerint is jelentősen eltérőek a vélemények nemcsak az óraszám tekintetében, hanem a tematika megítélésében és a szemléletmódban is.

A „Mondd, mit használsz abból a matematika anyagból, amit tanultál” típusú kérdésfeltevésnek alapvető fontosságot tulajdonítok. Különböző szakterületek művelőivel beszélgetve számomra is az derült ki, hogy a matematikában tanított témakörök nem igazodnak a kor igényeihez. E prakticista szemléletet persze sokan elutasítják többnyire az általános műveltségre és a matematikaoktatás közvetett, gondolkodásfejlesztő hatására hivatkozva. Akad olyan ismerősöm, aki ilyen érvelést meghallva a l' art pour l' art szelle-mében az iskolákat is elefántcsonttoronyba zárná: oda se be, se ki. Ennek szelidített, diákok számára is emészthető prózai változata szerint a másodfokú egyenlet megoldását stb. azért kell megtanulnunk, hogy amikor a gyerekünknek ezzel az anyagrésszel problémája lesz az iskolában, akkor tudjunk segíteni neki, egyébként 99,99%-os esélyünk van arra, hogy soha többé ne találkozzunk vele. A gondolkodást pedig egyes ironikus vélemények szerint az ultin stb. keresztül is lehet legalább ilyen hatékonysággal fejleszteni. Az általános, szélsőséges megfogalmazások felhívják a figyelmet a létező problémákra. A sommás megállapítások és ítéletek helyett csak a konkrét javaslatok és a rendszeranalízis következetes alkalmazása vezethet el a keresett megoldáshoz.

Paradigmaváltások

A paradigmaváltások kutatása az utóbbi időszakban egyre inkább előtérbe kerül. (4) A mono-, az inter- és a multidiszciplináris megközelítések komplex kidolgozása és összehasonlítása ugyan még nem történt meg, de az egyértelműen megállapítható, hogy minden inter- és multidiszciplináris szemléletmód merénylet a szaktudományokkal szemben. Az egyes szaktudományok differenciálódási folyamatban jöttek és jönnek még ma is létre, míg az interdiszciplináris megközelítésekben az egységesítési törekvések

fejeződnek ki. A történelmi fejlődés egyik kulcsa éppen az egyre fokozódó munkamegosztások, specializálódások hatékonyságában rejlik. Ezek eredményessége vitathatatlan, ugyanakkor a napjainkban tapasztalható információrobbanás szükségessé teszi különböző egységesítési módszerek kidolgozását és széleskörű alkalmazását. Az elmúlt évtizedekben számos ilyen, elméletileg többé-kevésbé megalapozott kísérletnek lehattünk szemtanúi az oktatásban is. Mindenre kiterjedő, átfogó megoldás még nincs, a különböző próbálkozások során csak részeredmények születtek. Az interdiszciplináris fogalmak egyelőre ellenállnak minden olyan kísérletnek, ami egy zárt elméleti keretbe próbálja beszorítani őket. Ez valószínűleg nem is tehető meg hagyományos szaktudományi értelemben. E hiányosság megkérdőjelezheti, hogy egy ilyen elméleti szempontból „labilis” ismeretanyagnak milyen mértékig szabad az oktatásba belekerülnie, ugyanakkor a gyakorlati használhatósága, a hétköznapi életben felmerülő igények kikényszerítik, hogy egyre nagyobb teret kapjanak az interdiszciplináris megközelítési módok a tanítási folyamatban is. Az iskolai oktatási rendszerben kialakult tantárgyi rendszer, újabban műveltségi területek alapvetően a hagyományosan kialakult szaktudományokhoz, szakterületekhez kötődnek. Ebben a rendszerben elsősorban csak a speciális szaktudományi fogalmaknak van helye, az interdiszciplináris fogalmak háttérbe szorulnak, a főhangsúly a szaktudományi sajátosságokra kerül. A gyakorlati igények egyre inkább kikényszerítik, sürgetik e hagyományos szaktárgyi rendszer megváltoztatását. Az újabb és újabb tantárgyak, mint például a technika, az informatika fémjelzik e folyamatokat. Ma már elképzelhetőnek tűnik egy teljesen más elven alapuló „tantárgyi rendszer” is, amely jobban igazodna a gyakorlati követelményekhez.

A tanítás-tanulás folyamatában realizálódik a megszerzett ismeretanyag átadása a következő nemzedéknek. Az átadandó ismeretanyag rohamos bővülése számos problémát, feszültséget okoz. Ezek feloldására, enyhítésére a következő három lehetőség kínálkozik:

- a tanulásra fordított idő mennyiségi növelése, ennek mind gazdasági, mind pszichikai korlátai vannak;
- az egyre fokozódó specializálódás, ennek korlátot szab az, hogy a közben általánosan szükséges ismeretek köre is rohamosan bővül;
- jobb, hatékonyabb módszerek kidolgozásával.

Egy más alapelven nyugvó tantárgyi rendszer kialakításához e három lehetőséget összevetve kézenfekvő megoldásnak tűnik, hogy az elsajátítandó ismeretanyagokat ne a hagyományos szaktudományi rendszer alapján tanítsuk, hanem megpróbálkozzunk ezen ismeretkörrel a különböző interdiszciplináris fogalmak köré csoportosítani és az ismerethalmaz nagyobb részét ezeken keresztül lefedni. Ilyen fogalom szerepét töltheti be a modell, a rendszer, az információ, a logika, az ábrázolástechnika stb. Egy ilyen alapon nyugvó rendszer előnye lehetne a gyakorlatiassága mellett az is, hogy ezen az úton számos lényeges ismeret elsajátítható úgy is, hogy közben nem tévelygünk egy-egy szaktudomány belső labirintusában, nem kényszerülünk az adott szaktudomány belső fejlődési logikáját követni. Persze ennek az elképzelésnek ma még nincs realitása, de világszerte több helyen is folynak ilyen jellegű alap kutatások. Meggyőződésem, hogy ezekkel az alap kutatásokkal egyidőben, szinkronban a pedagógiai alkalmazásokban is kell ilyen irányú kísérleteket végezni, hiszen az oktatási rendszerben természetéből adódóan meglevő nagy tehetetlenség, időállandó miatt különben az iskola és a gyakorlati élet közti szakadék rohamosan tovább nő. Az oktatás ilyen irányú elmozdulásának alapfeltétele, hogy a matematika tananyagot korszerűsítsük, hiszen a matematika szükségképpen megjelenik minden interdiszciplináris fogalomban, mivel általánosan elfogadottan ez tölti be a tudományok közötti nyelv funkcióját. A NAT általam ismert verzióinak matematikával foglalkozó részeit ebből a szempontból nem találom megnyugtatónak. Hiányolom például, hogy a relációk nem szerepelnek benne kellő súllyal, pedig ezek nélkül nehezen és csak ellentmondásokkal terheltén tekinthetők át a mindenütt megjelenő osztályozási eljárások és rendszerezési elvek.

Relációk

A halmaz tananyagba kerülésekor éles viták folytak, sokan úgy vélték, hogy a halmaz fogalma és a halmazműveletek triviálisak, csak szemfényvesztésnek tartották ezt a „tu-

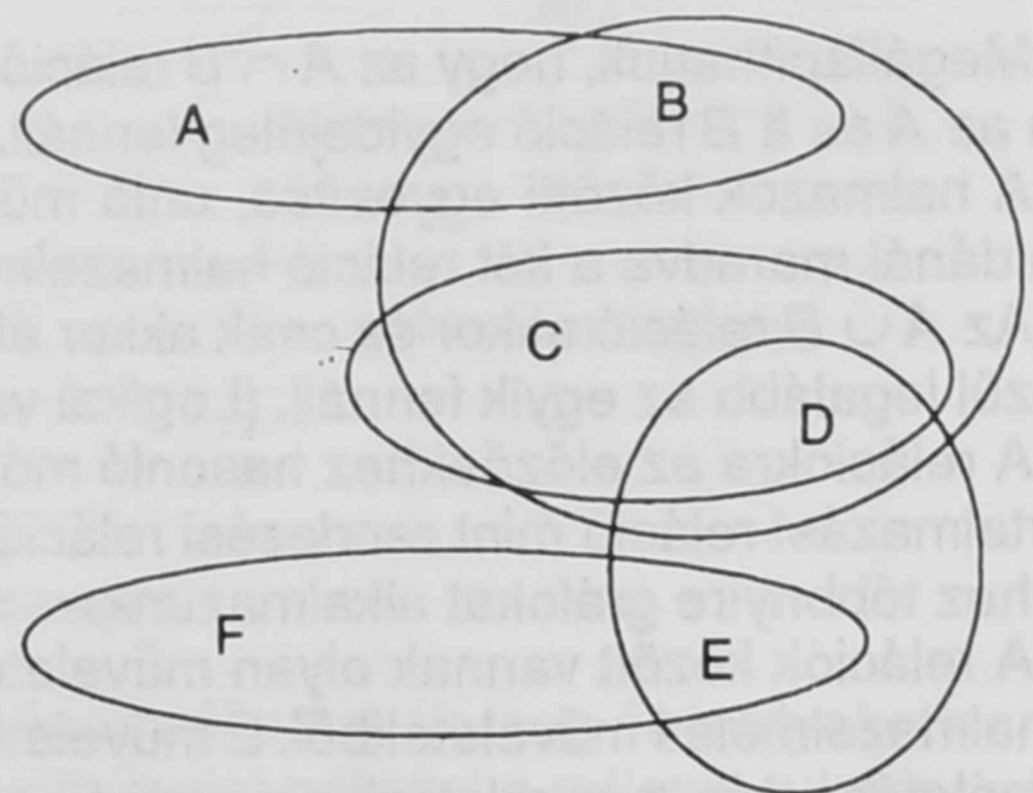
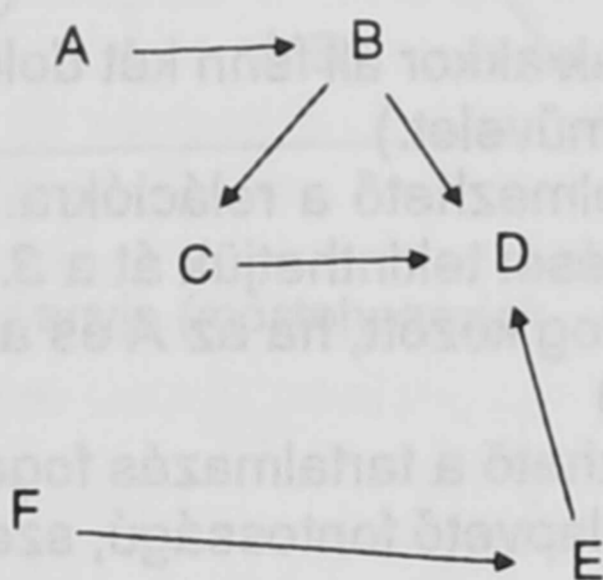
dományoskodást”. A relációkról még ma is bölcsen hallgatunk az iskolákban, közben feltételezzük, hogy ezt már mindenki önkéntelenül is elsajátította, valahonnan mindenki ismeri és tudja nemcsak a relációk tulajdonságait, hanem lehetséges alkalmazásait is. Az iskolában a halmaz alapfogalom, amivel megtanulunk tudatosan bánni, a relációk általános ismerete pedig magánügy, elég ösztönösen alkalmazni. A matematikában ismeretes, hogy e két fogalom csak együttesen jelenhet meg. A kétváltozós, vagy idegen szóval bináris relációk megadásához az egymással kapcsolatban álló elemek halmazát kell ismernünk. Ezeket a legkülönbözőbb módon adhatjuk meg, ábrázolhatjuk:

1. táblázatos formában;
2. a rendezett párok felsorolásával, ahol az $(a;b)$ rendezett pár azt fejezi ki, hogy $a @ b$ teljesül. (a sorrend feltüntetése azért lényeges, mert nem minden kapcsolat szimmetrikus);
3. gráffal;
4. térképrendszerének megadásával.

Az 1. ábrán az A,B,C,D,E,F-fel jelölt versenyzők között lejátszott mérkőzéseken kialakult „legyőzte” relációt adtuk meg a rendezett párok felsorolásával, táblázatos formában, gráffal és térképrendszerének megadásával. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban csak egy adott halmaz elemei közötti relációk vizsgálatára szorítkozunk. A relációk „formális tulajdonságai” szemléletesen érzékelhetők a különböző megadási módokon keresztül. A reflexivitás-irreflexivitás, a szimmetria-aszimmetria-antiszimmetria és a tranzitivitás persze mindaddig formális, amíg e tulajdonságok következményeit nem sikerül áttekinteni. Az egyenlőség típusú kapcsolatoknak megfelelő ekvivalenciarelációk, a különböző rendezéseket leíró rendezési relációk és a hétköznapi hasonlóság fogalmának megfelelő toleranciareláció így jól kezelhetők, ezek részletesebb vizsgálata elvezethet a különböző rendszerezési eljárások pontosabb megértéséhez.

	A	B	C	D	E	F
A		+				
B			+	+		
C				+		
D						
E				+		
F					+	

A „legyőzte” reláció =
 $\{ (A,B); (B,C); (B,D); (C,D); (F,E); (E,D) \}$

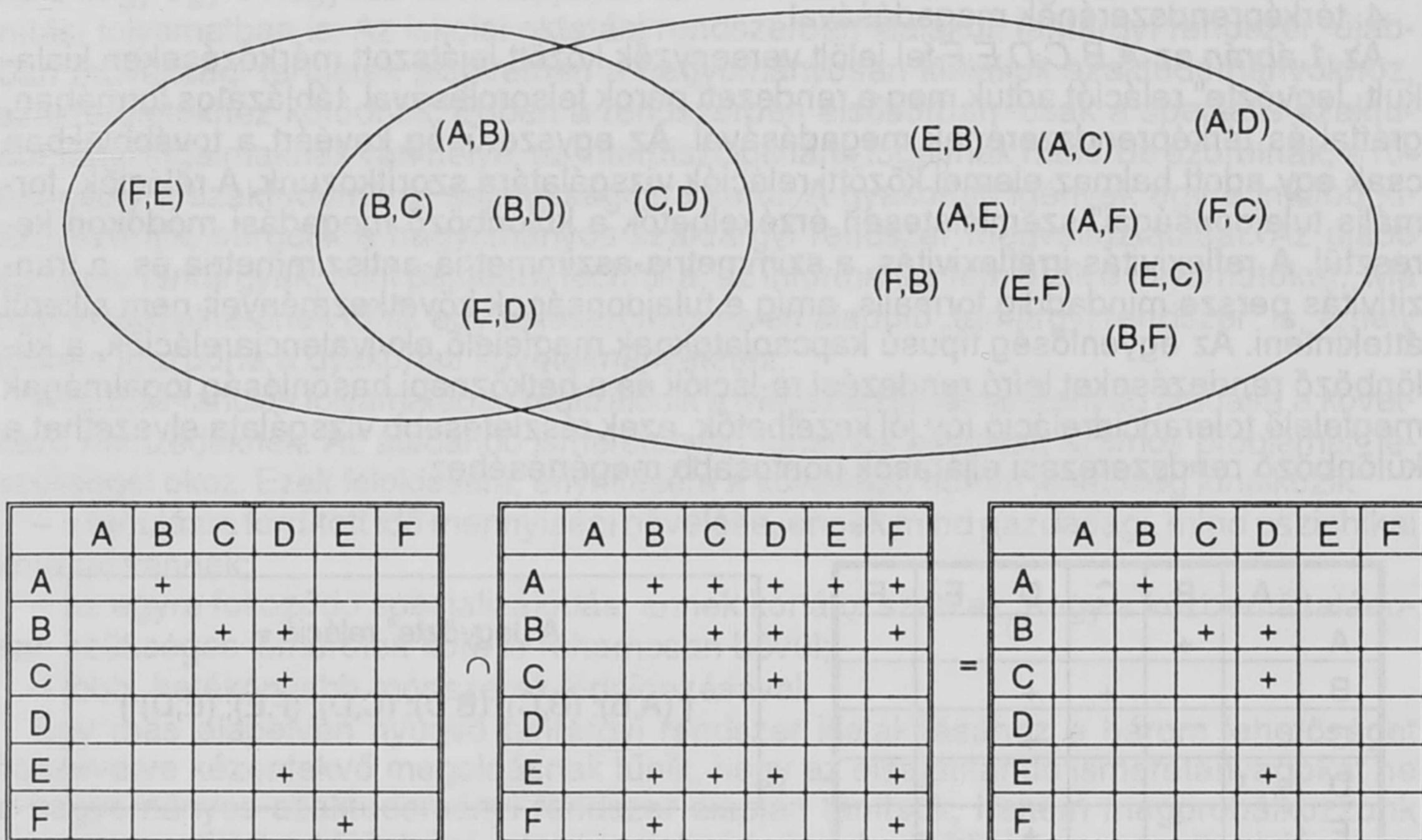


1. ábra

A „legyőzte” reláció megadása különböző módokon

A matematikában a bináris relációkat a rendezett párok halmazaként szokás definiálni. A halmazműveletek alapján tehát a relációkkal is végezhető műveletek, ami módot nyújt egyben a halmazműveletek gyakorlására is.

A relációk között végezhető műveletek tárgyalása során is a továbbiakban az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a szerepeltetett relációk ugyanazon objektumok között, ugyanazon a halmazon vannak értelmezve, bár ez nem szükséges. A halmazok közötti metszetművelet a relációkra is értelmezhető. Az előző példánál maradva az A, B, C, D, E, F versenyzők között tekinthetjük az „idősebb relációt” is. A két reláció halmazelméleti metszetét áttekinthetjük a szokásos Venn-diagramon, vagy a táblázatos megadásban is. (2. ábra)



2. ábra
Két reláció metszete

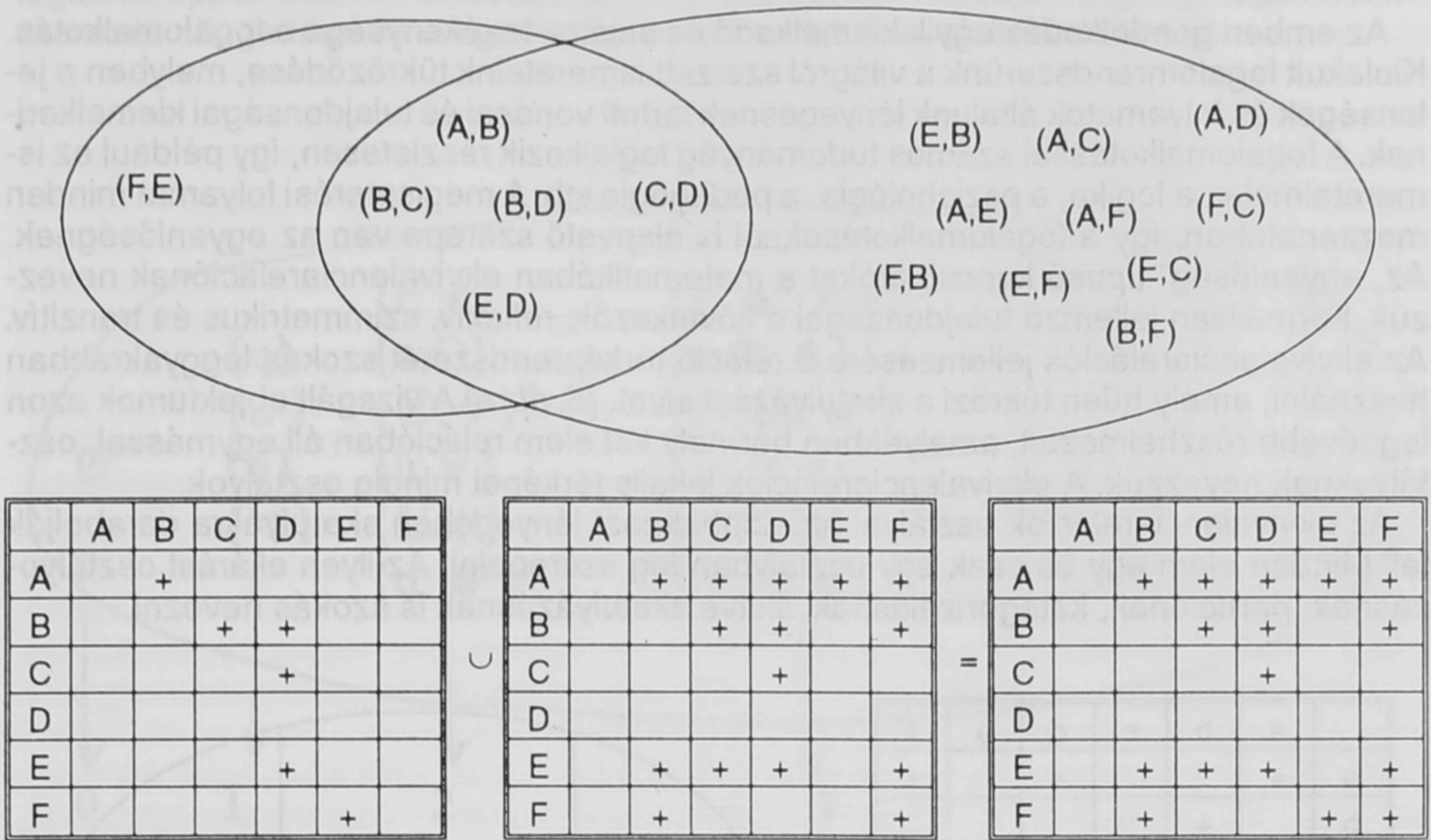
Megállapíthatjuk, hogy az $A \cap B$ reláció akkor és csak akkor áll fenn két dolog között, ha az A és a B reláció egyidejűleg fennáll. (Logikai és művelet.)

A halmazok közötti egyesítés, unió művelete is értelmezhető a relációkra. Az előző példánál maradva a két reláció halmazelméleti egyesítését tekinthetjük át a 3. ábrán.

Az $A \cup B$ reláció akkor és csak akkor áll fenn két dolog között, ha az A és a B reláció közül legalább az egyik fennáll. (Logikai vagy művelet.)

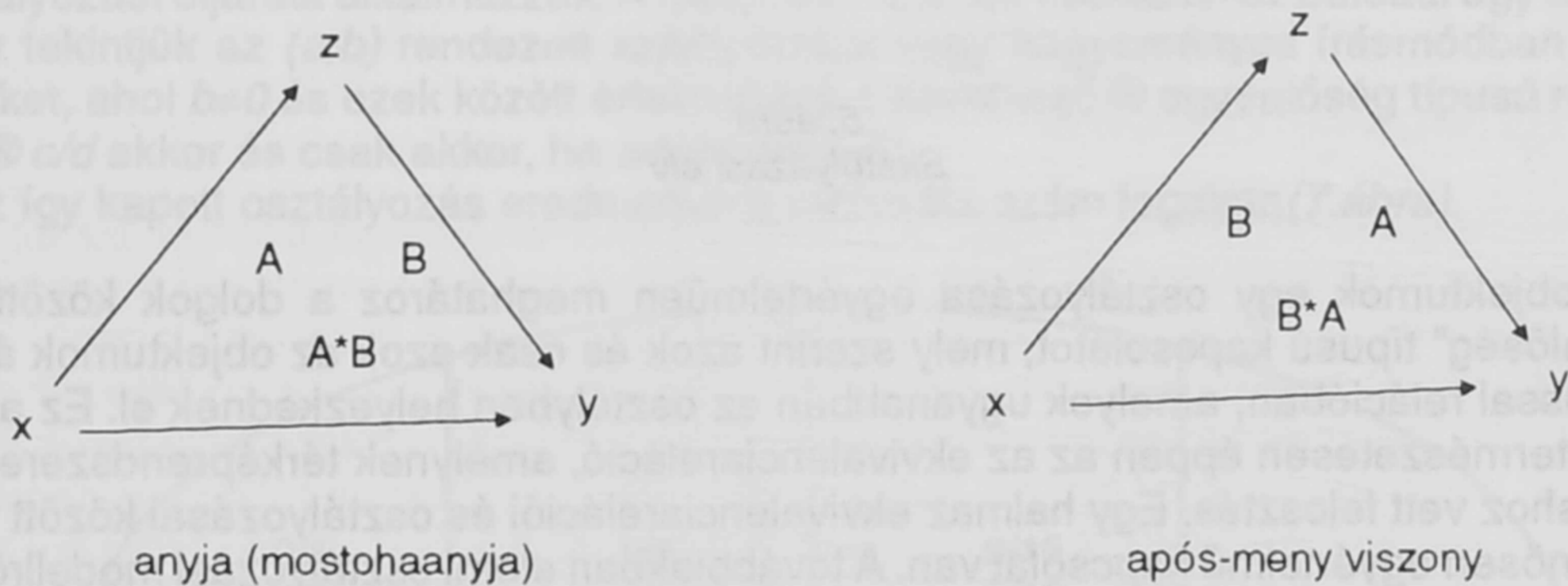
A relációkra az előzőekhez hasonló módon értelmezhető a tartalmazás fogalma is. A tartalmazási reláció mint rendezési reláció vizsgálata alapvető fontosságú, szemléltetéséhez többnyire gráfokat alkalmazunk.

A relációk között vannak olyan műveletek is, amelyek nem vezethetők le közvetlenül a halmazelméleti műveletekből. E műveletek közül nagyon fontos szerepe van a relációk elméletében és gyakorlati alkalmazásaiban az $A*B$ szorzatrelációnak. Ennek definíciója a következő: két objektum, x és y között az $A*B$ kapcsolat akkor áll fenn, azaz $xA*By$ akkor teljesül, ha van olyan z „kapcsoló elem”, amelyre fennáll az xAz és zBy kapcsolat. Példaként jelölje A a „felesége”, B pedig az „apja” relációt. Ekkor az $xA*By$ azt jelenti, hogy van olyan z elem, aki apja y -nak és férje x -nek, amit másképpen úgyis megfogalmazhatunk, hogy x felesége y apjának. Az $A*B$ reláció tehát az x anyja vagy mostoha-



3. ábra
Két reláció uniója

anyja y -nak relációt jelenti. A $B \circ A$ reláció pedig azt jelenti, hogy van olyan z „kapcsolóelem”, aki y felesége és x -nek gyermeke. Ez éppen a férfiak közötti veje relációnak felel meg. A relációk szorzatműveletéről megállapíthatjuk, hogy nem kommutatív. (4. ábra)



4. ábra
Relációk szorzata

Vizsgálható, hogy a relációk mely tulajdonságait változtatják meg és melyeket nem az egyes műveletek. A relációk közötti metszetszorzat művelet például a reflexív tulajdonságot megtartja. Két reflexív reláció metszete ugyanis szükségképpen reflexív, hiszen ha az összes objektum relációban áll önmagával mindkét kapcsolat szempontjából, akkor az (a,a) rendezett párok a metszethalmazba is bekerülnek. Amennyiben valamelyik reláció nem reflexív tulajdonságú, akkor a metszetszorzat eredményeként sem kapunk reflexív relációt.

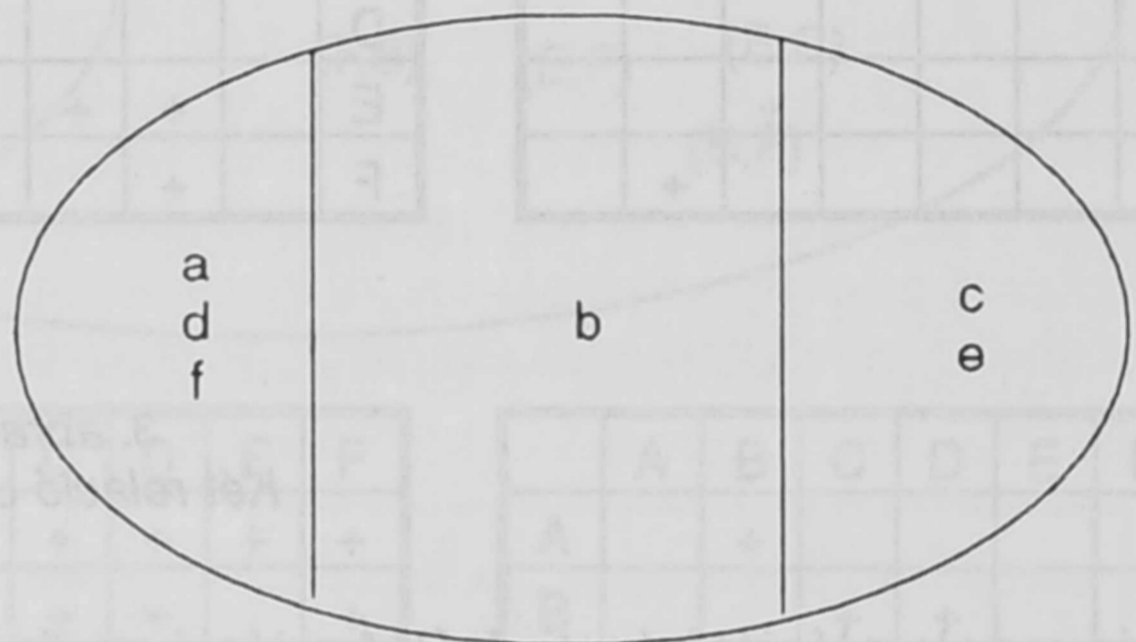
Osztályozási modellek és ekvivalenciarelációk

Az emberi gondolkodás egyik kiemelkedő és sajátos tevékenysége a fogalomalkotás. Kialakult fogalomrendszerünk a világról szerzett ismereteink tükröződése, melyben a jelenségek és folyamatok általunk lényegesnek tartott vonásai és tulajdonságai kiemelkednek. A fogalomalkotással számos tudományág foglalkozik részletesen, így például az ismeretelmélet, a logika, a pszichológia, a pedagógia stb. A megismerési folyamat minden mozzanatában, így a fogalomalkotásoknál is alapvető szerepe van az egyenlőségnek. Az „egyenlőség” típusú kapcsolatokat a matematikában ekvivalenciarelációnak nevezük. Formálisan jellemző tulajdonságai a következők: reflexív, szimmetrikus és tranzitív. Az ekvivalenciarelációk jellemzésére e reláció térképrendszerét szokás leggyakrabban használni, amely hűen tükrözi a skatulyázási elvet. (5. ábra) A vizsgált objektumok azon legbővebb részalmazait, amelyekben bármely két elem relációban áll egymással, osztályoknak nevezzük. A ekvivalenciarelációk lokális térképei mindig osztályok.

Az ekvivalenciarelációk osztályai az alaphalmazt lényegében skatulyákra darabolják fel. Minden elem egy és csak egy osztályban fog szerepelni. Az ilyen eljárást osztályozásnak, partíciónak, kategorizálásnak, illetve skatulyázásnak is szokás nevezni.

	a	b	c	d	e	f
a	+			+		+
b		+				
c			+		+	
d	+			+		+
e			+		+	
f	+			+		+

A reláció mátrixa



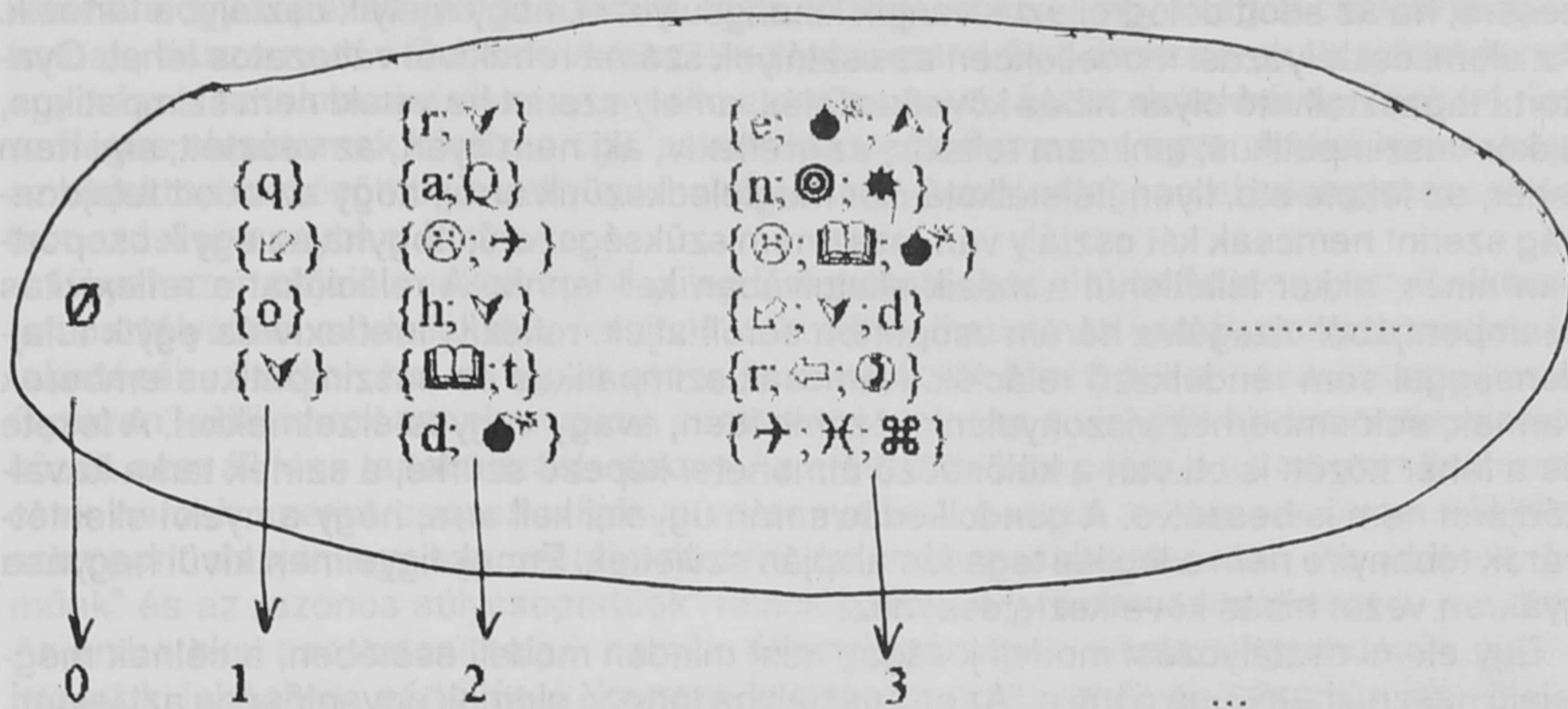
Az ekvivalenciareláció térképrendszere

5. ábra
Skatulyázási elv

Az objektumok egy osztályozása egyértelműen meghatároz a dolgok között egy „egyenlőség” típusú kapcsolatot, mely szerint azok és csak azok az objektumok állnak egymással relációban, amelyek ugyanabban az osztályban helyezkednek el. Ez a kapcsolat természetesen éppen az az ekvivalenciareláció, amelynek térképrendszere a kiinduláshoz vett felosztás. Egy halmaz ekvivalenciarelációi és osztályozásai között tehát kölcsönösen egyértelmű kapcsolat van. A továbbiakban elemi osztályozási modelltől beszélünk, ha az objektumok között értelmezve van egy egyenlőség típusú reláció, vagy ami ezzel egyenértékű, adott az objektumoknak egy partíciója.

Új fogalmak kialakításakor esetenként különböző relációk, tulajdonságok ismeretében kell az objektumok osztályozását elvégeznünk, de gyakran előfordul, hogy az objektumok osztályba sorolása képződik először, és az így képződött „egyenlőség” típusú relációhoz tartozó tulajdonságok ezek ismeretében alakulnak ki. A megismerés kezdeti szakaszában ezt az utóbbi módszert alkalmazzuk gyakrabban. A kisgyermek például a színek megtanulásakor a tárgyakat osztályokba sorolja. Kialakít a színekre vonatkozóan egy elemi osztályozási modellt. A színek szerinti osztályozás kialakítása meglehetősen időigényes és nehéz gondolkodási műveleteket igényel. E folyamatban tettenérhető az összehasonlítás, az analízis, a szintézis, az elvonás, az általánosítás, az absztrakció műveletei éppúgy, mint a logikai ítéletek és szintézisük alkalmazása. Téves hiedelem, hogy elegendő

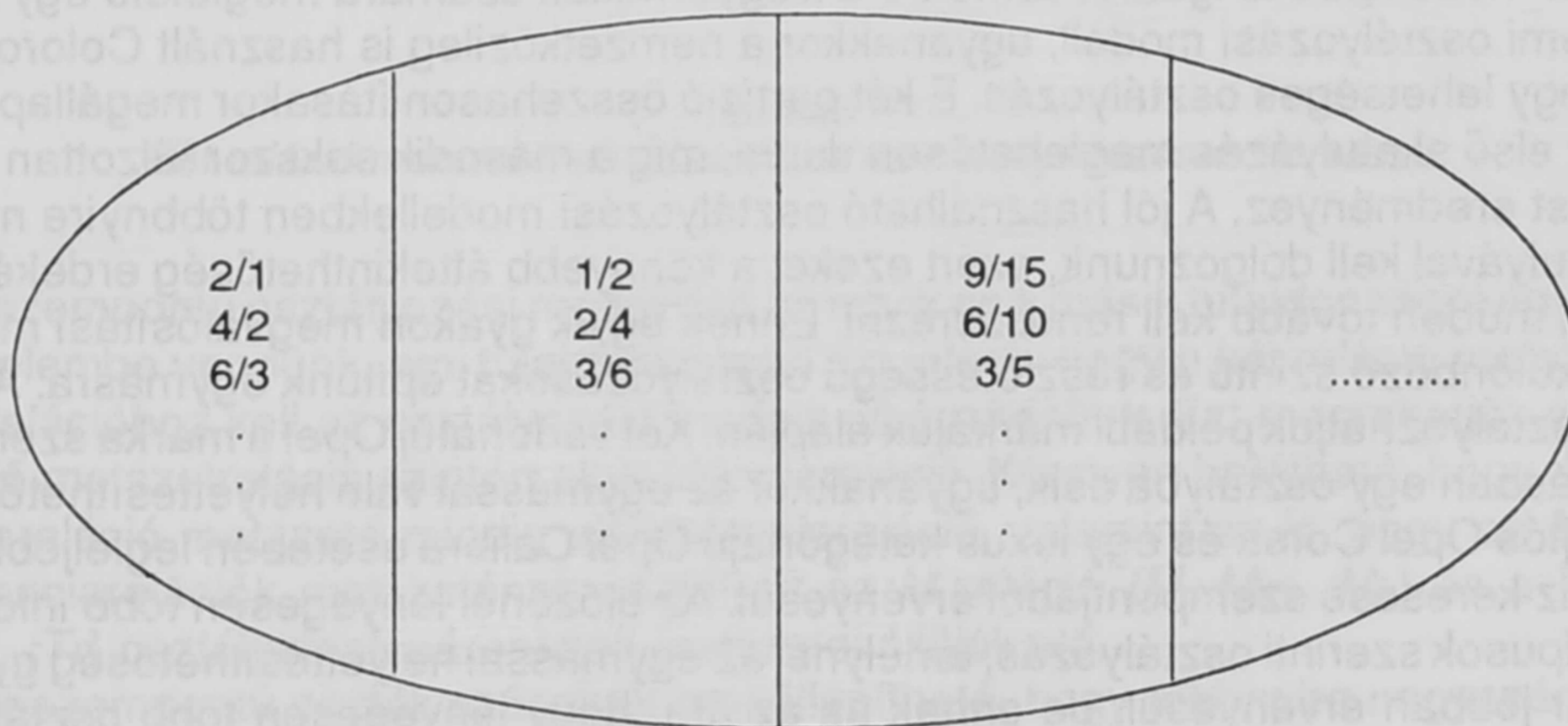
dő berakni sok tárgyat a megfelelő színű csoportba és ezzel máris megszületett a színek fogalma, éppen csak az elnevezésüket kell megtanulni hozzájuk. Egy-egy fogalmi rendszerezés elfogadása és elfogadtatása ennél sokkal bonyolultabb folyamat.



6. ábra
A természetes számok fogalma és az osztályozási modell

A számfogalom kialakulásában is nyomon követhető a skatulyázási elv alkalmazása. Két halmaz akkor kerül a számosság szempontjából ugyanabba az osztályba, ha elemeket maradéktalanul párba lehet állítani, azaz kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetjük az elemeket egymásnak. Ennek az elvnek az alkalmazásával alakul ki a természetes számok fogalma. (6. ábra) Az egyes osztályok elnevezését jelöljük meg a számnevekkel. Matematikai tanulmányaink során a természetes számok fogalmi bővítéseivel, az egész, a racionális és a valós számokkal is foglalkozunk. Ezek fogalmának kialakításakor is az osztályozási eljárást alkalmazzuk. A racionális számok esetében ez például úgy történik, hogy tekintjük az $(a;b)$ rendezett számpárokat vagy hagyományos írásmódban az a/b törtet, ahol $b \neq 0$ és ezek között értelmezzük a következő @ egyenlőség típusú relációt: $a/b @ c/d$ akkor és csak akkor, ha $ad=bc$ teljesül.

Az így kapott osztályozás eredménye a racionális szám fogalma (7. ábra).



7. ábra
A racionális számok fogalma

(Természetesen a számkörök felépítésénél a műveletek és tulajdonságaik is fontos szerepet játszanak.) A geometriai vektorfogalom kialakításában is alkalmazzuk ezt az osztályozási eljárást. A skatulyázás során kapott csoportokat többnyire valamilyen módon elnevezzük. Ez történhet valamilyen kódrendszer segítségével, de egyszerűbb esetekben külön neveket is adhatunk az egyes osztályoknak. Gyakran ugyanazt a kifejezést használjuk magának az osztálynak a megnevezésére, mint egy elemének a megnevezésére, ha az adott dologról azt kívánjuk kihangsúlyozni, hogy melyik osztályba tartozik. Az elemi osztályozási modellekben az osztályok száma rendkívül változatos lehet. Gyakorta tapasztalható olyan hibás következtetés, amely szerint ha valaki nem szimpatikus, akkor unszimpatikus; ami nem reflexív, az irreflexív; aki nem nyert, az veszett; ami nem fehér, az fekete stb. Ilyen ítéletalkotáskor megfeledkezünk arról, hogy az adott tulajdonság szerint nemcsak két osztály van, azaz nem szükségszerű, hogyha az egyik csoportban nincs, akkor feltétlenül a másik skatulyában kell lennie. A relációkat a reflexivitás szempontjából vizsgálva három csoportba sorolhatjuk: reflexív, irreflexív és egyik tulajdonsággal sem rendelkező relációk. Nemcsak szimpatikus és unszimpatikus emberek vannak, sok emberhez viszonyulunk közömbösen, avagy vegyes érzelmekkel. A fekete és a fehér között is ott van a különböző átmenetet képező szürke, a színek tarka kavalkádjáról nem is beszélve. A gondolkodás során ügyelni kell arra, hogy a nyelvi ellentétpárok többnyire nem a logikai tagadás alapján születtek. Ennek figyelmen kívül hagyása gyakran vezet hibás következtetésekhez.

Egy elemi osztályozási modell jóságát, mint minden modell esetében, a célnak megfelelő használhatósága dönti el. Az egy osztályba tartozó elemek egyenlősége azt jelenti, hogy ezeket egymással helyettesíthetőknek tekintjük. A különböző dolgok egymással történő helyettesítését gyakran használjuk. A szóismétlések elkerülésére gyakran szinonimákat használunk, egy gép meghibásodott alkatrészét javításkor többnyire egy másikra cseréljük ki. Az elemek egymással való helyettesíthetősége a műszaki életben különösen nagy fontossággal bír. A csereszabatoság olyannyira alapvető gazdaságossági kérdés, hogy jogilag is szabályozzák. Az iskolai oktatásban is helyenként túlburjánzik a helyettesítéses módszer számonkérése, amely lényegében bizonyos megoldási mechanizmusok, algoritmusok elsajátítására és alkalmazására irányul. Azok az elemi osztályozási modellek, melyekben a skatulyák száma nagy, többnyire nehézkesen áttekinthetők. A nagyszámú osztály egyszerűbb kezelésére különböző rendszerezési módszereket alkalmazunk.

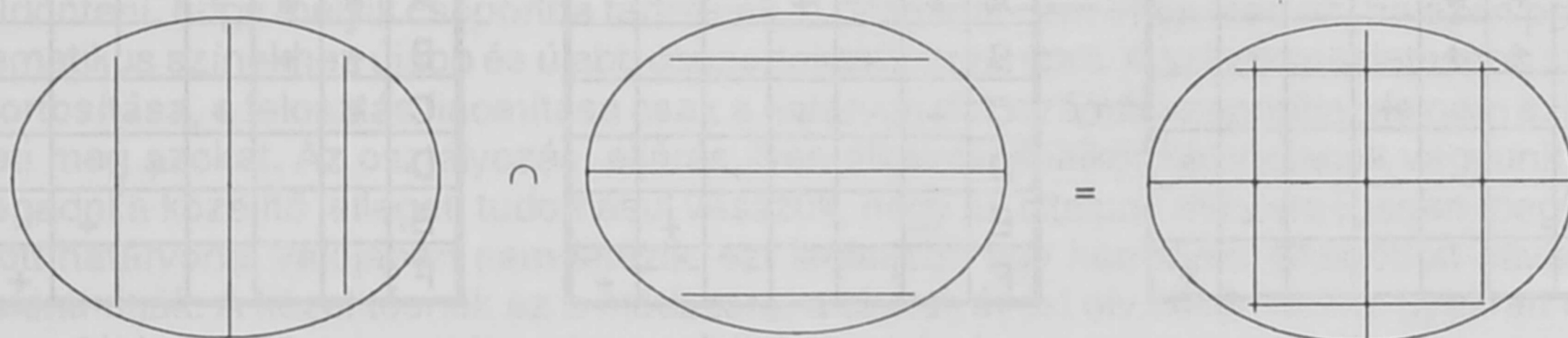
Hierarchikus rendszerek

Minden megalkotott modell jóságát a gyakorlati használhatósága dönti el. Ez az osztályozási modellekre is igaz. A színekre a kisgyernek számára megfelelő egy egyszerűbb elemi osztályozási modell, ugyanakkor a nemzetközileg is használt Coloroid-rendszer is egy lehetséges osztályozás. E két partíció összehasonlításakor megállapíthatjuk, hogy az első skatulyázás meglehetősen durva, míg a második sokszor túlzottan is finom felosztást eredményez. A jól használható osztályozási modellekben többnyire nagyszámú skatulyával kell dolgoznunk, ezért ezeket a könnyebb áttekinthetőség érdekében valamilyen módon tovább kell rendszerezni. Ennek egyik gyakori megvalósítási módja az, amikor különböző szintű és részletességű osztályozásokat építünk egymásra. A gépkocsikat osztályozhatjuk például márkájuk alapján. Két vadonatúj Opel a márka szerinti csoportosításban egy osztályba esik, ugyanakkor az egymással való helyettesíthetőség egy háromajtós Opel Corsa és egy luxus kategóriájú Opel Calibra esetében legfeljebb a márkaszerviz keresése szempontjából érvényesül. Az előzőnél lényegesen több információt nyújt a típusok szerinti osztályozás, amelynél az egymással helyettesíthetőség gyakorlati elve már jobban érvényesül, de ennek az az ára, hogy lényegesen több osztállyal kell dolgoznunk. A gyakorlati életben az ilyen egymásra épülő osztályozásokat többnyire gráfokkal szoktuk szemléltetni.

A relációk közötti tartalmazási viszony az ekvivalenciarelációk között is egy rendezést valósít meg. Jelölje $(T_1; T_2; \dots; T_n)$ a T ekvivalenciareláció által létrehozott osztályokat, (típusok szerinti osztályozás) és $(M_1; M_2; \dots; M_k)$ az M reláció (márka) szerinti osztályozási

rendszer. Könnyen beláthatjuk, hogy amennyiben a T reláció része a M relációnak, akkor mindegyik T_i kategória valamelyik M_j osztálynak a részhalmaza. A tartalmazási relációnak mint rendezési relációnak az ábrázolásával feltüntetethetjük a kétfajta osztályozási eljárás közötti alá fölé rendeltségi viszonyt. Ebből kitűnik, hogy a típusok szerinti $(T_1; T_2; \dots; T_n)$ osztályozási rendszer mindegyik kategóriája a márka szerinti $(M_1; M_2; \dots; M_k)$ osztályok valamelyikének részhalmaza. Az egymást tartalmazó ekvivalenciarelációk sorozatával így képezett gráf szerkezete fastruktúrájú, azaz az egyes ágak csak szétághathatnak, össze nem nőhetnek. A faszerkezetű hierarchikus rendszerek tulajdonképpen egymással tartalmazási viszonyban álló elemi osztályozási modellekből épülnek fel. Tetszőleges objektumok körében egy fastruktúra meghatározása egyenértékű azzal, hogy az objektumok között olyan ekvivalenciarelációkat adunk meg, amelyek egymással tartalmazási viszonyban állnak.

Ugyanazon objektumokon egyidejűleg vizsgálhatunk különböző szempontból elkészített osztályozási modelleket is. Fastruktúrát használhatunk az osztályozási modellek áttekintéséhez akkor, ha az egyes ekvivalenciarelációk között tartalmazási viszony van. Gyakran találkozunk azonban olyan esetekkel is, amikor a vizsgált ekvivalenciarelációk között nem áll fenn tartalmazási viszony. Az erősportokban például a versenyeken nemcsak nemek szerint csoportosítják a versenyzőket, hanem súlyuk szerint is. Mindkét szempont alapján egy-egy osztályozási rendszer áll rendelkezésünkre. Az „azonos neműek” és az „azonos súlycsoportúak” relációk közül egyik sem tartalmazza a másikat. Az embereket csoportosíthatjuk nemük, állampolgárságuk, iskolai végzettségük, foglalkozásuk, lakhelyük, pártállásuk, keresetük, egészségi állapotuk stb. szerint is. Mindegyik szemponthoz elkészíthetjük az elemi osztályozási modellt, de meg kell állapítanunk, hogy e relációk között sincs tartalmazási viszony, következésképpen elemi osztályozási modelljeink közvetlenül nem rendeződnek el fastruktúrába. A 8. ábrán a nemek és az iskolai végzettség szerinti egyszerűsített osztályozási modellt vázoltuk.



8. ábra

Két reláció metszetének ábrázolása az osztályképzésen keresztül

A kétszempon t u osztályozási modellben az egyik és a másik tulajdonságot egyidejűleg kell figyelembe vennünk, ami tulajdonképpen azt jelenti, hogy a két reláció metszeteként kapott relációhoz kell az osztályozási modellt elkészítenünk. Ezt megtehetjük akkor, ha az eredő metszetreláció szintén ekvivalenciareláció. Könnyen belátható, hogy két ekvivalenciareláció metszete mindig ekvivalenciareláció, valamint az is, hogy az M és a T ekvivalenciarelációk metszetének osztályait az M reláció $\{M_1; M_2; \dots; M_n\}$ és a T reláció $\{T_1; T_2; \dots; T_k\}$ osztályainak páronkénti metszetei állítják elő.

A többszempon t u osztályozásokról megállapítható, hogy többnyire nagyszámú kategóriát hoznak létre. A keletkező osztályok számára felső becslést kaphatunk a szorzatszabály alkalmazásával. Az egyes osztályok megnevezéséhez esetenként tudományos nomenklatúrát, gyakran pedig egyszerű betű-szám kombinációkkal leírt kódokat használnak. Ugyanazon objektumokon a legkülönbözőbb hierarchikus rendszereket definiálhatjuk. Az előzőekben vázolt elemi szabályok betartásával mindegyik eljárás korrekt, tu-

dományos igényességű osztályozásnak tűnhet, csak éppen a végeredmények különböznek alapvetően egymástól. Egy-egy fastruktúra megalkotásakor nem feledkezhetünk meg arról, hogy egy hierarchikus rendszermodell készítésénél a használhatósága határozza meg. E gyakorlati szempont figyelmen kívül hagyásakor a kapott rendszerezésünkre a Murphy-féle jellemzés lesz a mérvadó: „Ezt a rendszert azért találták ki, mert ha semmit sem tudunk, legalább rendszerbe tegyük, hiszen ettől úgy tűnhet, legalább a rendszert ismerjük. „A hierarchikus rendszereket egyesek megkülönböztetik aszerint, hogy mesterségesek, vagy természetesek. Célszerűbb jól használható és mesterkélten készített rendszermodellekről beszélni. A jól használható rendszerezésekben többszempontú osztályozásokkal találkozhatunk. Az előzőekben említett szorzatszabály alapján azt várhatnánk, hogy a szempontok növekedésével együtt az osztályok száma hatványozottan növekedik. Ezzel szemben gyakran azt tapasztaljuk, hogy egy-egy újabb szempont figyelembevételkor az osztályok száma már lényegesen nem változik meg. Ez a jelenség valamilyen belső összefüggésre hívja fel a figyelmet, az újabb szempont a már figyelembevett szempontoktól függ valamilyen módon. Ilyen hierarchikus rendszer megtalálása óriási segítséget nyújt olyan fogalomrendszerek kialakításához, amelyben a belső törvényszerűségek, kapcsolatok is feltárhatók

Egy-egy jól használható hierarchikus rendszer kialakítását sok próbálkozás előzi meg, közben számos elemi osztályozási modell születik meg. Gondolhatnánk arra, hogy ezen modellek egyesítésével olyan újabb modelleket is megalkothatunk, amelyekben az osztályok száma nem gyarapodik. Az ilyen kísérletek többnyire eredménytelenek. E kudarcok oka abban keresendő, hogy az ekvivalenciarelációk uniója általában nem ekvivalenciarelációt ad eredményül. Ennek belátásához elegendő a 9. ábrán szereplő példát áttekinteni, ahol az eredő reláció nem tranzitív az A, B, C elemek viszonya miatt.

	A	B	C	D	E	F
A	+	+				
B	+	+				
C			+			
D				+		
E					+	
F						+

∪

	A	B	C	D	E	F
A	+		+			
B		+				
C	+		+			
D				+		
E					+	
F						+

=

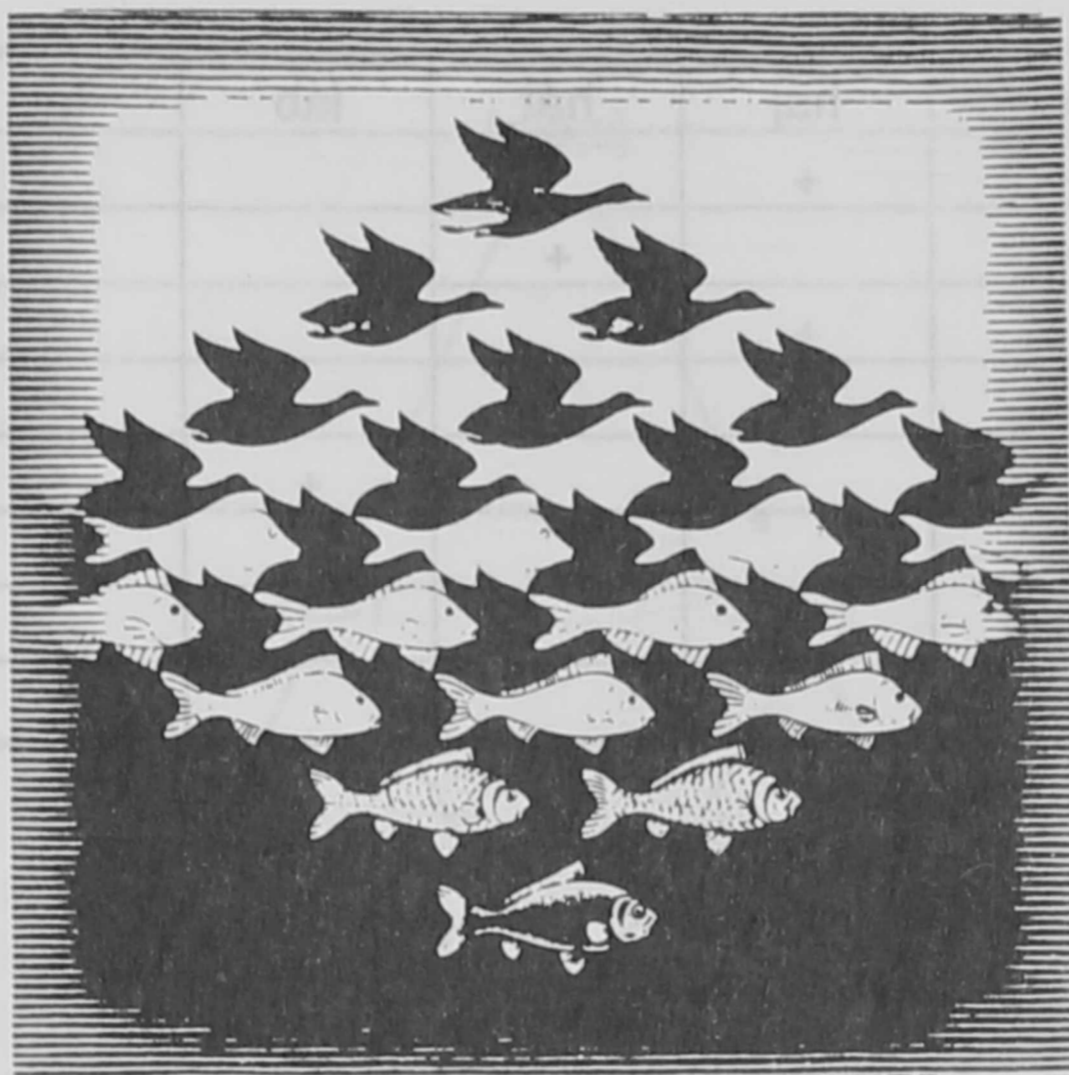
	A	B	C	D	E	F
A	+	+	+			
B	+	+				
C	+		+			
D				+		
E					+	
F						+

9. ábra
Ekvivalenciarelációk uniója nem mindig ekvivalenciareláció

Itt csak érdekességképpen említjük meg, hogy az A és B ekvivalenciák egyesítése akkor és csak akkor lesz ekvivalencia, ha teljesül az $A \cup B = A * B$ egyenlőség, és ekkor az $A * B = B * A$ egyenlőség is teljesül.

Strukturális analízis

Az eddigekben tárgyalt hierarchikus rendszerek mint modellek használhatóságának is korlátai vannak. A színek osztályozási rendszerének kialakításakor természetesnek vettük, hogy az „azonos színérzetet kelt” reláció ekvivalenciareláció. Ez a hallgatólagos feltevés azonban nem igaz, hiszen e relációra a tranzitivitás nem teljesül. A lényegtelen, nem érzékelhető különbségek felhalmozódása következtében sok-sok apró lépésen keresztül a sárgától eljuthatunk a pirosig olyan módon, hogy a közbülső összehasonlított színeket páronként mindig egyformának érzékeljük. A lényegtelen eltérések felhalmo-



10. ábra

Esher: Víz- és levegőképe jól mutatja a kis különbségek fokozatos felhalmozódását is

zódhatnak jelentős különbséggé is. Ezt a jelenséget jól példázza *Esherképe is. (10. ábra)*. Az „egymással helyettesíthetőség elve” toleranciarelációk esetében csak korlátozottan érvényesül. Az osztályozási modell ilyenkor csak egy közelítése lehet a valóságnak. Adott dolgokat, jelenségköröket gyakran próbálunk meg osztályozási modellel leírni, pedig esetenként tudjuk, hogy a vizsgált reláció nem ekvivalenciareláció. Az osztályozási modell, a skatulyázási elv ezekben az esetekben csak egy közelítést adhat eredményül. A színek osztályozásakor például a skatulyák között éles határvonalat húzunk, holott a valóságban nincs ilyen. E határvonalnál levő színekről nem tudjuk azután egyértelműen eldönteni, hogy melyik csoportba tartoznak. A dilemmát nem oldja meg az, ha ezen problematikus színekhez újabb és újabb csoportokat hozunk létre. A színek részletesebb csoportosítása, a felosztás finomítása csak a határvonalak számát szaporítja, de nem szünteti meg azokat. Az osztályozási eljárás ilyen alkalmazásaikor kénytelenek vagyunk elfogadni a közelítő jelleget, tudomásul vesszük, hogy az általunk mesterségesen meghúzott határvonal valójában nem létezik, ezt legfeljebb egy homályos elkenődött sávként tekinthetjük. A közelítésnek ez a módszere, a skatulyázási elv alkalmazása gyakran nagyon jól használható osztályozási modelleket eredményez.

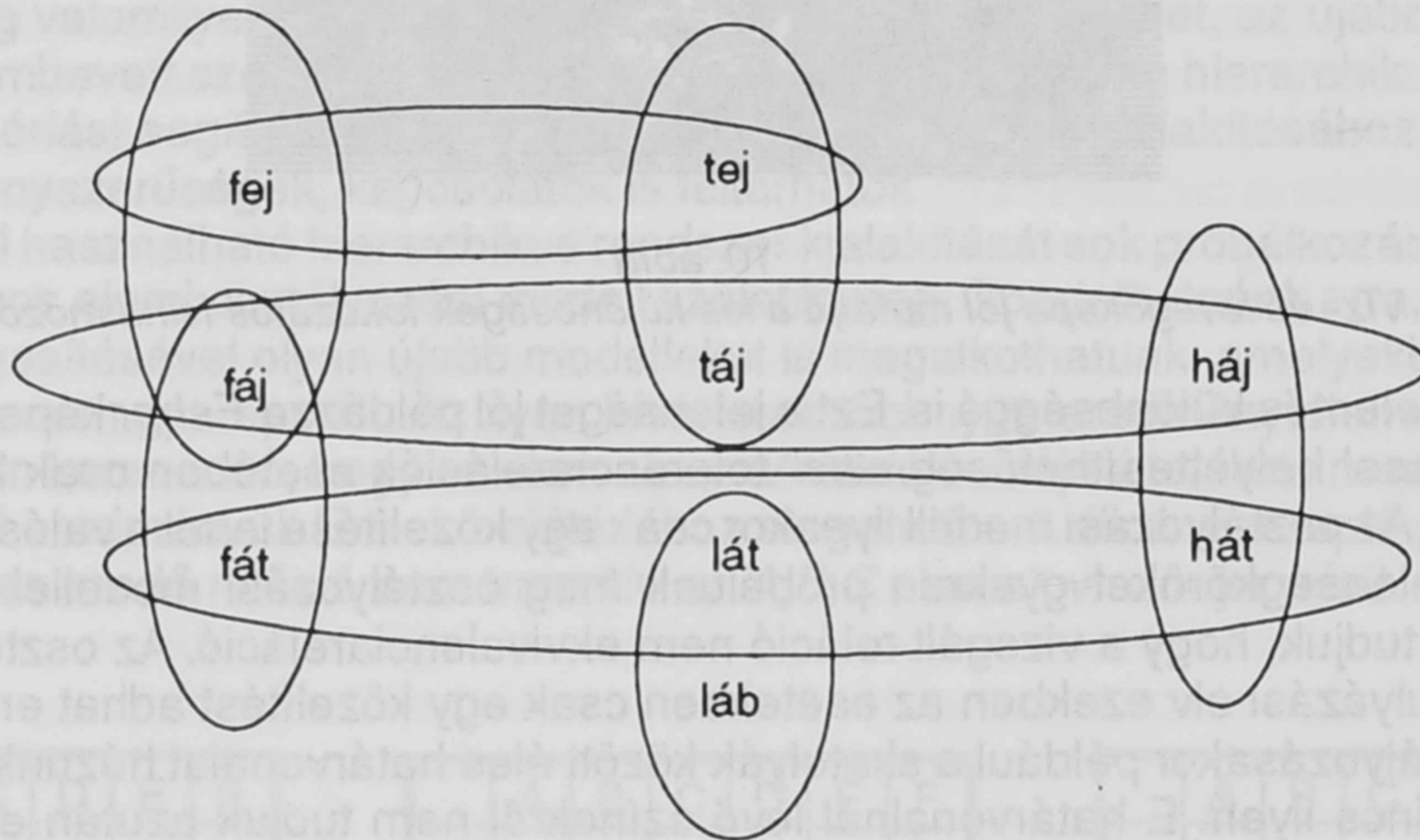
A toleranciarelációk ekvivalenciákkal való közelítése, a meglevő hasonlóság egyenlőséggel történő helyettesítése sok esetben nem nyújt kielégítő pontosságú modellt. Ilyenkor strukturális vizsgálatokat kell végezni, melynek eszköztárába a skatulyázási elv, az egymással helyettesíthetőség elve és a rendezési elvek általánosításai egyaránt fellelhetők. Toleranciarelációkra alkalmazva ezen elveket kialakítható egy általánosított hierarchikus rendszer fogalma is, de ezek szerkezete jelentősen eltérhet az egyszerű fast-ruktúráétól. A következőkben a főbb szerkezeti különbségekre mutatunk rá.

A hasonlóság tárgyalásakor példaként tekinthetjük azt a nyelvi játékot néztük, melyben egy-egy betű változtatásával kell értelmes szavakon keresztül eljutni egy adott szótól egy másikig. Az általunk vizsgált relációban két szót hasonlónak tekintettünk, ha csak egy betűben különböztek egymástól. Az alábbi táblázatban e toleranciareláció táblázatos megadásának egy részletét tüntük fel. (11. ábra)

Megállapíthatjuk, hogy a toleranciarelációknál az osztályok egymásba metszhetnek, ugyanaz az elem különböző kategóriákban is szerepelhet. A toleranciaosztályok tehát nem az alaphalmaz egyszerű feldarabolásával keletkeznek. Ez egy rendkívül lényeges különbséget jelent az ekvivalenciarelációkhoz viszonyítva. Két toleranciareláció metszete és uniója is mindig toleranciarelációt eredményez.

A relációk közötti tartalmazási viszony a toleranciarelációk között is egy rendezést valószínűsít meg. A toleranciarelációk körében is igaz, hogy egy T reláció osztályai az M reláció osztályainak részhalmazai, ha az M toleranciareláció része a T toleranciarelációnak. A

	fej	fát	háj	hát	láb	lát	táj	tej
fej	+	+	+					+
fát	+	+		+				
háj	+		+					
hát		+		+				
láb					+			
lát						+		
táj							+	
tej								+



11. ábra
Egy tolerancia reláció és osztályai

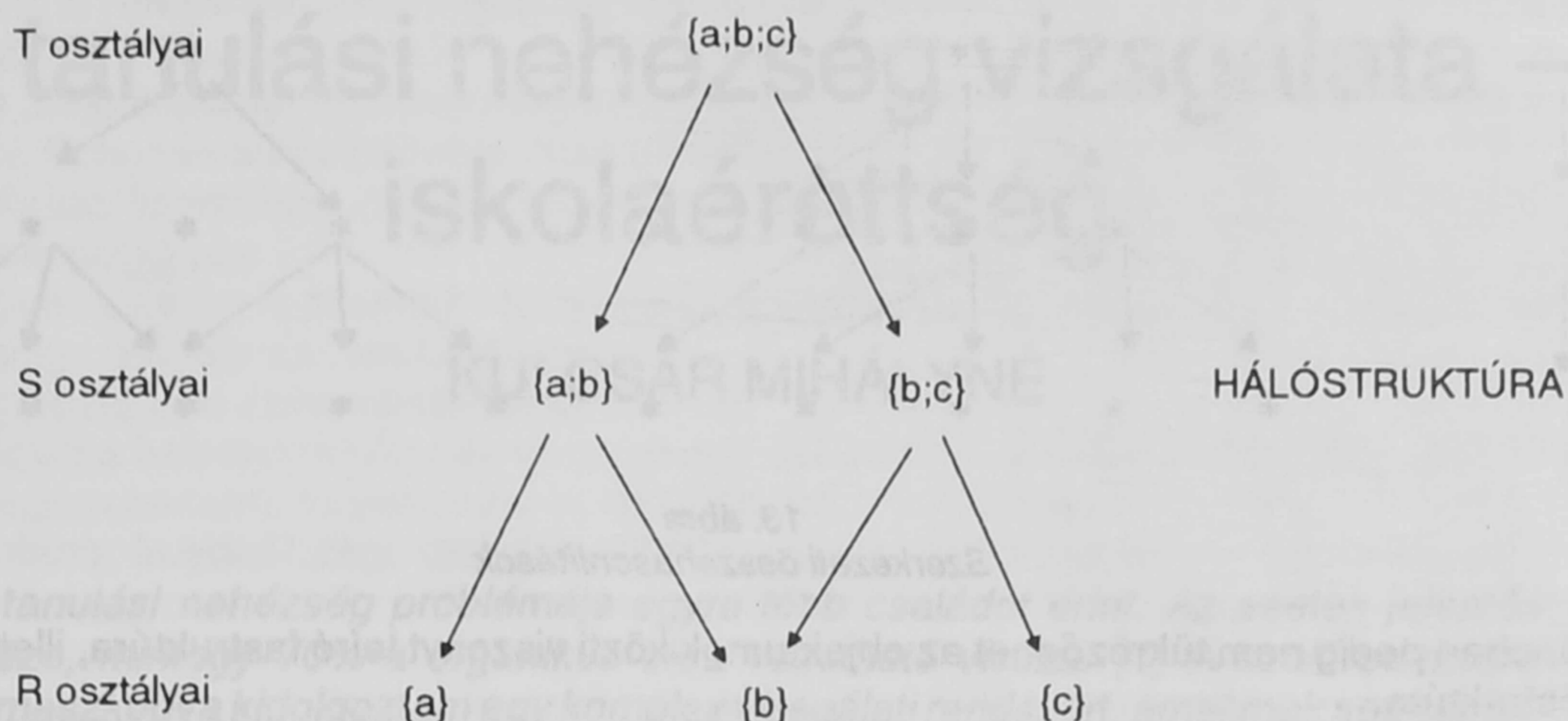
toleranciaosztályozások egymásra építése azonban többnyire nem fastruktúrát eredményez, mert a toleranciaosztályoknak lehetnek közös elemei. Ez okozza azt, hogy a különböző szintű toleranciaosztályok rendezése során a gráf egyes ágai nemcsak elágazhatnak, hanem össze is nőhetnek. A következő véges példa rámutat a gráf ágainak összenövési lehetőségére.

Az $a; b; c$ objektumokon tekintsük a következő relációkat:

<i>R reláció</i>				<i>S reláció</i>				<i>T reláció</i>			
	a	b	c		a	b	c		a	b	c
a	+			a	+	+		a	+	+	+
b		+		b	+	+	+	b	+	+	+
c			+	c		+	+	c	+	+	+

A táblázat alapján mindegyik relációról látható, hogy reflexív, szimmetrikus és az $R \subset S \subset T$ tartalmazási viszony fennáll. A 12. ábrán rendre megadtuk a $T; S$ és R relációk toleranciaosztályait és az ezek közötti tartalmazási viszonyt feltüntető gráfot.

Az $\{a; b; c\}$ pontból elágazó ágak a $\{b\}$ pontban ismét összefutnak. Ez a jelenség az ekvivalenciaosztályozásra épített hierarchikus rendszereknél nem fordulhat elő. A toleranciaosztályozásra épített általánosított hierarchikus rendszer szerkezete inkább egy hálóra hasonlít, ezért a továbbiakban hálóstruktúrának nevezzük. (Megjegyezzük, hogy

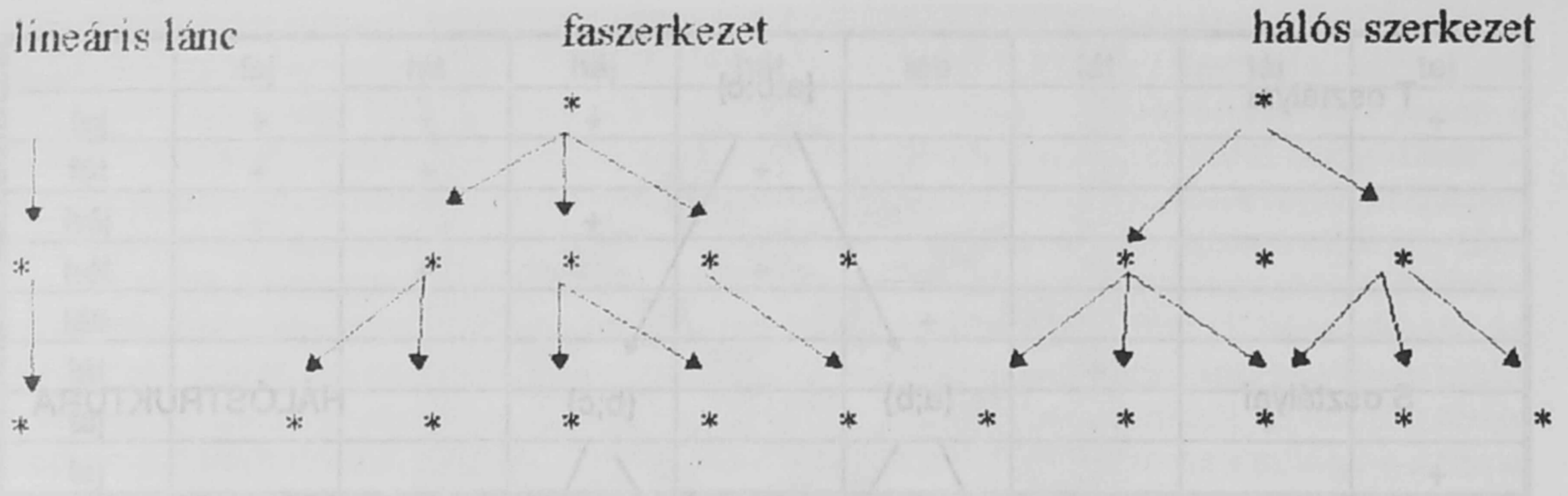


12. ábra

Toleranciosztályozásra épített hierarchikus struktúra

a választott példában a T és a R reláció tranzitív is, azaz S kivételével ekvivalenciarelációk.) A vázolt különbségek felhívják a figyelmet a strukturális elemzések fontosságára. Nyilvánvaló, ha hogy ha a valóságos szerkezet a 12. ábrán vázolt struktúrájú, akkor akkor azt hiába próbáljuk meg egy fastruktúrával leírni. (13. ábra) Ugyanahhoz a hálóstruktúrához teljesen különböző fastruktúrákat szerkeszthetünk, de egyik sem fogja pontosan leírni a szerkezeti kapcsolatokat. A pontosításhoz különböző egyéb módszereket is rá kell még ültetni a fastruktúrára, ami a rendszer áttekinthetőségét rontja, a kezelését pedig jelentősen megnehezíti. Az osztályozási eljárás eredményeként kapott többnyire nagyszámú osztályokat rendszerezni kell. Ennek egyik lehetséges módja a fastruktúrába vagy hálóstruktúrába történő rendezés. E struktúrák szerkezete ábrázolásuk alapján könnyen áttekinthető, egyszerű eligazodásokat tesz lehetővé, de nagy mennyiségű objektum esetén az ábra elkészítése gyakran technikai korlátokba ütközik. Egy másik általánosan elterjedt módszer esetén a dolgokat nevük vagy kódjuk alapján, egy megállapított szabály szerint sorbaállítjuk. Ennek legelterjedtebb változata az, amikor a szavakat ábécérendben soroljuk fel. Ezt a rendezést használják a lexikonok, szótárak éppúgy, mint a könyvek végén közölt tárgymutatók vagy névmutatók. (A számítógépeknél a könyvtárszerkezet tartalmát megjeleníthetjük név szerinti rendezésben, az egyes egységek, könyvtárak vagy file-ok keletkezési időpontjának sorrendjében is.) Esetenként előfordul, hogy az egyes objektumokhoz névként valamilyen, többnyire számokat is tartalmazó kódokat rendelünk. A számok körében is rendelkezésünkre áll egy természetes rendezés, mint a betűk között az ábécé, sőt ez az egész világon egységes, ezért a legkülönbözőbb tudományos területeken is előszeretettel kódolnak és rendszereznek számok segítségével. (Az egyes nyelvekben használt betűk és betűrendek eltérhetnek egymástól!) A fogalmakhoz például az Egyetemes Tizedes Osztályozás számjelzeteket rendel, de azok ettől még nem válnak mennyiségű. értelmetlen dolog két ETO jelzetet összeadni, kivonni, szorozni stb, hiszen ezen műveletek a számok körében elvégezhetőek ugyan, de a fogalmak, témakörök között ezek csak értelmetlen zagyvaságot jelentenek. Két ETO jelzet nagyságát sincs értelme összehasonlítani, hiszen nincs értelme valamilyen alá-fölrendeltséget feltételezni a két teljesen különböző témakör, fogalom között. A számszerűsítési eljárások elemzése már átvezet a skálázások részletesebb vizsgálatához.

A fogalmak, témakörök közötti természetes viszonyokat ez a rendezés nem tükrözi vissza. A számok közötti $<$ reláció grájában elágazás nem fordul elő, ezért ennek alkalmazása egy lineáris láncbarendeztést, egy sorrendiség kialakítását jelenti. Egy lineáris



13. ábra
Szerkezeti összehasonlítások

láncon pedig nem tükröződhet az objektumok közti viszonyt leíró fastruktúra, illetve hálóstruktúra.

A relációkat és tulajdonságait, a velük végezhető műveleteket sok esetben helytelenül alkalmazzuk. A modellezés elméleti vizsgálatakor például többen jutottak a következő álláspontra: „A hasonló jelenségek fogalmát – magát a fogalmat! – minthogy megtartásával az elmélet ellentmondásai nem küszöbölhetők ki nem célravezető a továbbiakban alkalmazni.” (5) E gondolatok mögött többnyire az a téves elképzelés uralkodik, hogy a modellezés során alkalmazott hasonlóság lényegében ugyanolyan, mint az egyenlőség, nem vesszük észre a kettő közötti lényegi különbséget. E kétfajta fogalom egybemosását csak megerősíti a matematikában tanult geometriai hasonlóság, amely valójában „egyenlőség” típusú reláció. A toleranciarelációk vizsgálatával ezek a félreértések elemi szinten tisztázhatók. Megdöbbenő tény, hogy ennek ellenére még a matematika szakon végzett kollégák sem hallottak ilyen dolgokról, a nem tranzitív relációk kiesnek a tantervi hálókból. E relációk pedig elemi szinten, játékosan is tanulmányozhatók. A véges példák sokkal közelebb állnak hozzánk, mint a folytonosságra, határértékre épülő fogalmak.

Ez utóbbiak persze már alsó tagozaton is szerepelnek a tananyagban. Ez egyben jelzi a matematika tananyagban meglévő egyoldalúságot, deformáltságot. A matematikai szimbolikát absztrakt jellegük ellenére hétköznapi tartalommal is könnyen megtölthetők a relációk tanítása során, hiszen a szemléletes, véges, hétköznapi példák serege áll rendelkezésünkre. Egyes becslések szerint az emberek közel 85%-a éppen a számukra igen keveset mondó matematikai szimbolikától irtózik és utálja meg magát a matematikát. Relációkat persze tanítunk, hiszen a geometriai illeszkedési relációk, a különböző műveletek és függvények mind példák bizonyos típusú relációkra, csak a legelemibb, és éppen ezért legáltalánosabban használható típusokkal nem foglalkozunk.

IRODALOM

- (1) Veres László: A tanulók túlterheléséről Iskolakultúra, 1992. 10. sz.
- (2) Ichnád Sándor: Hozzászólások Veres László cikkéhez Iskolakultúra, 1992. 22. sz.
- (3) Reimann József: Gondolatok a matematika tanításáról. Iskolakultúra, 1994. 5. sz.
- (4) Nagy József: Pedagógia: a harmadik paradigmaváltás küszöbén? In: Az elvesztett teljesség. Kortárs Kiadó, Budapest, 1995.)
- (5) Szücs Ervin: Hasonlóság, modellezés.
- (6) Ju A. Srejder: Egyenlőség, hasonlóság, rendezés.
- (7) Fatalin-Varsics: A tudományos modellalkotás alapjai. Calibra Kiadó, Budapest, 1993.