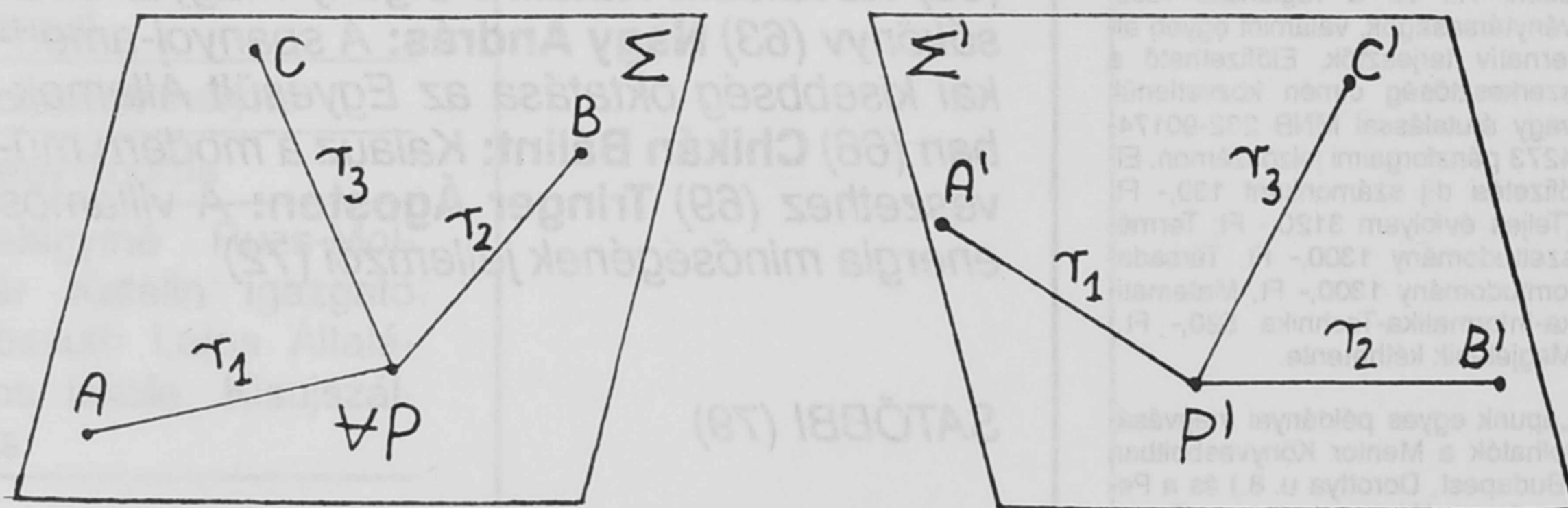


# A sík és a tér egybevágóságai, a szabályos alakzatok szimmetriái

CSÓKA GÉZA

Ezt a szép témakört még mindig érdemén alul ismerjük és alkalmazzuk az oktatásban. Az alábbiakban -kicsit részletesebben- két olyan tételt ismertetek, amelyek az ELTE TTK-n folyó ábrázoló- és számítógépi geometria tanár szakon a 2. féléves tételjegyzékben szerepelnek. Ajánlom a geometria iránt érdeklődő, térszemléletét próbára tenni kívánó olvasónak, szaktanárnak, középiskolás diáknak. Terjedelmi okokból nem foglalkozom a csoportelmélet egyébként szép és fontos vonatkozásaival. A dolgok természeténél fogva sokat bíztam az ábrák meggyőző erejére. Néha szándékosan is kihagytam kisebb részeket, hogy kérdéseket fogalmazzak meg a jobb földolgozás érdekében. A végén megtalálhatók a megoldásra vonatkozó utalások.

Az euklideszi sík és tér a vizsgálódás színhelye. Az azonosan áthúzott szakaszok hossza egyenlő, egy  $P'$  pont a  $P$  képe, minden jelölés a megszokott formájú. Egybevágósági transzformációnak a  $\Sigma$  sík  $\Sigma'$  síkra való távolságtartó, és így bijektív leképezését nevezzük, tehát amelyben minden  $A, B \in \Sigma$  esetén  $A', B' \in \Sigma'$ -re  $|A'B'| = |AB|$ . Ebből már következik, hogy egyenes-, párhuzamosság-, és szögtartó is. Három, egy egyenesre nem illeszkedő pont és a képe egyértelműen meghatározza a tárgysík bármely pontjának képét a képsíkon.



1. ábra

Itt transzformáción és egybevágóságon a ponthármas és képe által meghatározott megfeleltetést értjük, és nem azt a folyamatot, ahogy a három pont a képére kerül. Ez utóbbi nem is egyértelmű. Ha a síkot önmagára képezzük le ( $\Sigma \equiv \Sigma'$ ) és egy  $F$  pont egybeesik a képével  $F \equiv F'$ , akkor a leképezés fixpontjának vagy invariáns pontjának nevez-

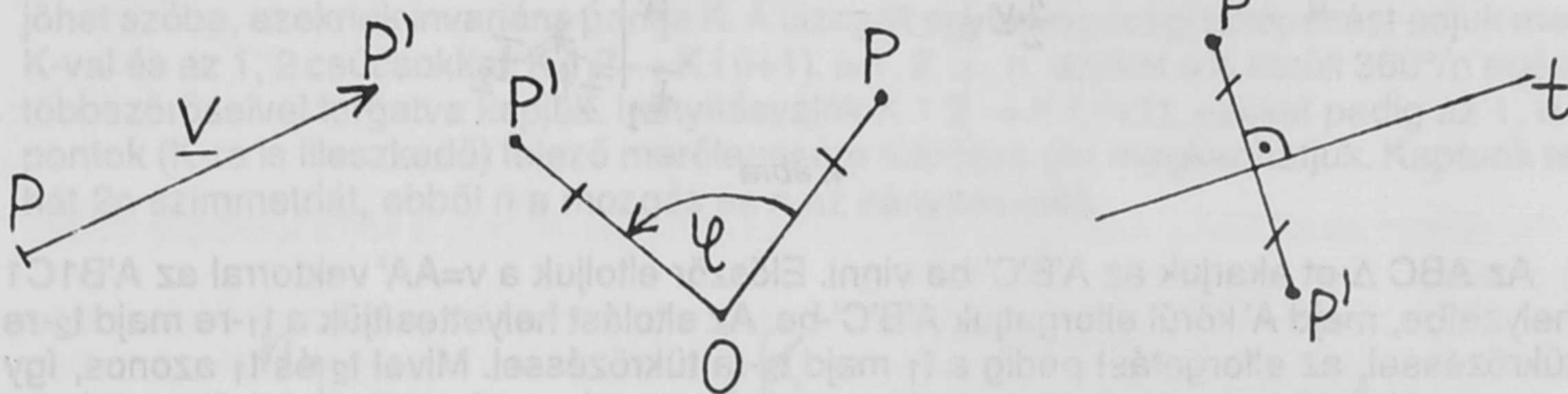
zük. Ilyenek például egyenesre tükrözésnél a tengely pontjai. A helybenhagyás nyújtja az értelmezés korlátlan lehetőségeit, hiszen eltolásnak  $-O$  vektorral, vagy tetszőleges pont körüli  $-O$  szögű – elforgatásnak is tekinthetjük.

Az egybevágóságot irányítástartónak nevezzük, ha az  $ABC$  és  $A'B'C'$   $\Delta$ -ek a sík valamely oldaláról nézve megegyező körüljárásúak. Ez bármely  $\Delta$ -re és a képére is igaz. Ha nem egyezik a körüljárásuk, akkor a transzformáció irányításváltó.

Kihasználjuk, hogy az egybevágóságot két pontpár:  $A, A'$  és  $B, B'$  is meghatározza, ha tudjuk még azt is, hogy irányítástartó vagy sem. Ezesetben egy  $C$  pont  $C'$  képe a távolságtartás révén egyértelműen adódik az  $A'B'$  egyenes vagy egyik vagy másik oldalán.

*Melyek tehát a sík egybevágósági transzformációi?*

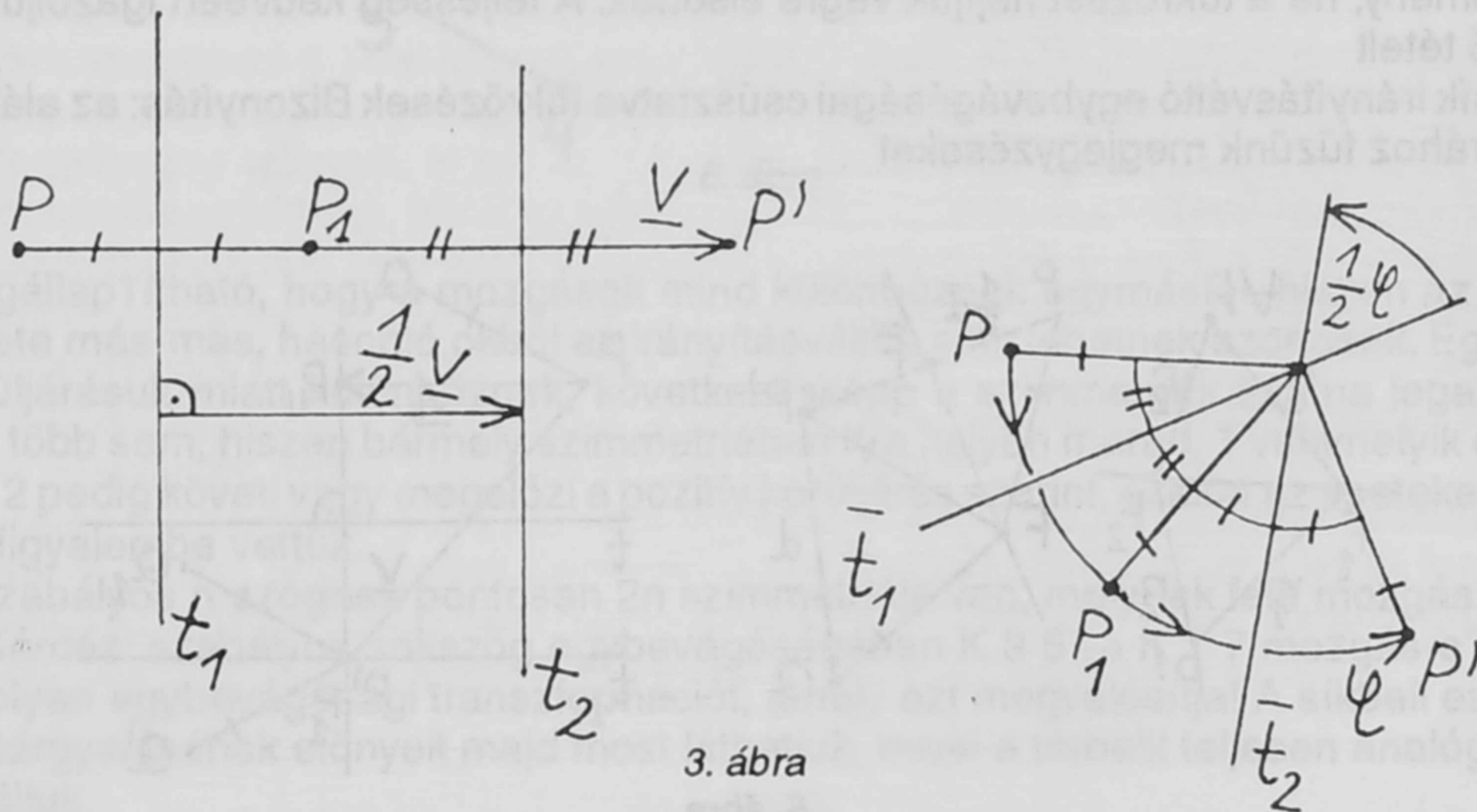
1. Legegyszerűbb, ha megadunk hármat és ezekről megmutatjuk, hogy minden lehetséges megfeleltetést előállítanak. Az ábrán az eltolás, a pont körüli forgatás és a tengelyes tükrözés jellemzőit tüntettük föl.



2. ábra

Az első kettő irányítástartó, és így síknak önmagában történő elmozgatásával is megjeleníthető, ezért mozgásnak nevezzük. Az eltolásban nem lehet fixpont, az elforgatásé az  $O$  pont, a tükrözésé pedig a tengely pontjai.

2. Fontos körülmény, hogyan lehet az eltolást és a forgatást tükrözésekkel helyettesíteni:

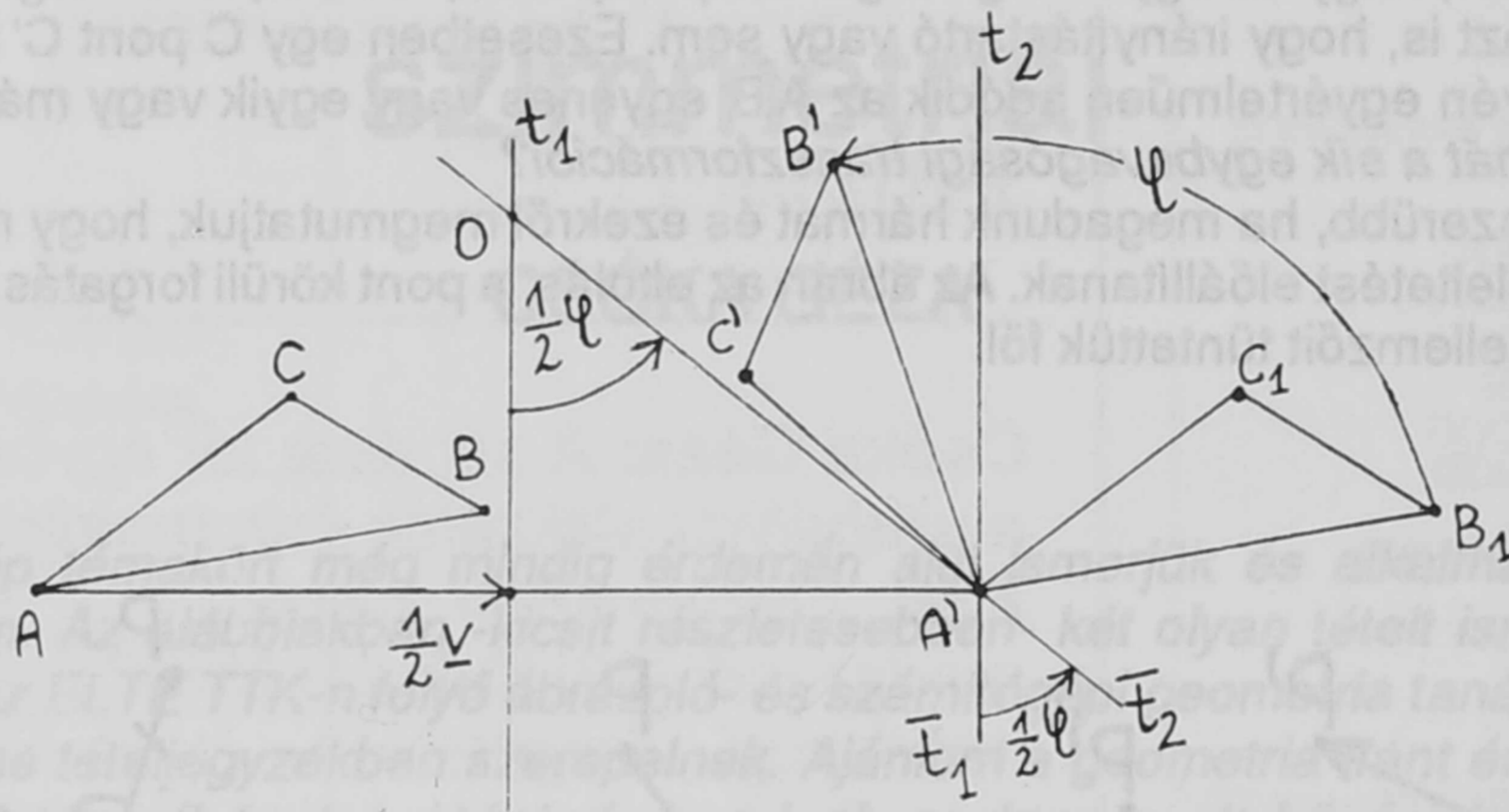


3. ábra

Az eltolás két, irányára  $\perp$  tengelyű egyenesre való tükrözés egymásutánjával egyenértékű, míg az elforgatást helyettesítő tükrözések tengelyei  $O$ -ban metszők és  $1/2\phi$  szöget zárnak be. Megjegyzendő, hogy mindkét esetben a tengelyek egyike szabadon választható a megfelelő sugársor elemeiből, a másikat már hozzá kell igazítani. Tetszőleges  $t_2$ -höz  $t_1$ -et  $-1/2v$  jelöli ki.

3. Kérdés: Igazak-e a 2-beli állítások, ha a  $P$  pontot máshol vesszük föl?

4. Tétel: A sík minden irányítástartó egybevágósága vagy eltolás, vagy elforgatás. Bizonyítás: ha az  $ABC \Delta$  és vizsgált képe eltolással fedésbe hozható, tehát  $AA'=BB'=CC'$ , akkor nyilván ez az eltolás a keresett transzformáció. Arra az esetre, amikor nincs két egyenlő a fenti vektorok között, a későbbiek érdekében a szokásostól (mely szerint  $AA'$  és  $BB'$  feléző merőlegeseinek metszéspontja körül egymásba forgathatók) -eltérő bizonyítást adunk, amely az ábráról olvasható le



4. ábra

Az  $ABC \Delta$ -et akarjuk az  $A'B'C'$ -be vinni. Először eltoljuk a  $v=AA'$  vektorral az  $A'B1C1$  helyzetbe, majd  $A'$  körül elforgatjuk  $A'B'C'$ -be. Az eltolást helyettesítjük a  $t_1$ -re majd  $t_2$ -re tükrözéssel, az elforgatást pedig a  $t_1$  majd  $t_2$ -ra tükrözéssel. Mivel  $t_2$  és  $t_1$  azonos, így egyenesükre kétszer tükröztünk, ami azonosság, vagyis a négy tükrözésből csak kettő számít,  $t_1$  és  $t_2$ . Mivel ezek metszik egymást egy  $O$  pontban, szögük  $1/2\phi$ , a két tükrözés egy  $O$  körüli,  $\phi$  szögű forgatással egyenértékű. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

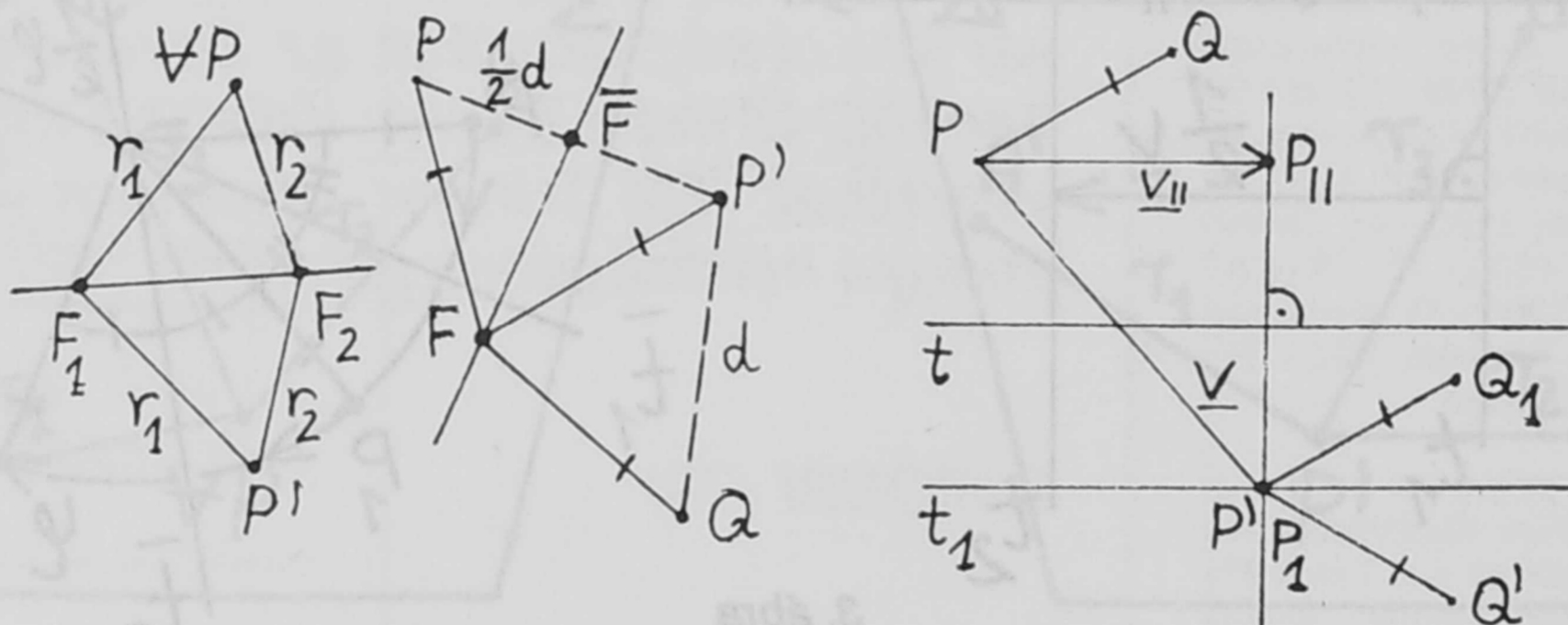
5. Kérdés: Rajzoljuk föl azt a speciális esetet, amikor  $AB=-A'B'$ .

Mit mondhatunk a sík irányításváltó egybevágóságairól?

Értelmezzünk egy irányításváltó egybevágóságot 6.

Egy  $t$  egyenessel párhuzamos  $v$  vektorral való eltolásból majd a  $t$ -re tükrözésből álló transzformációt csúsztatva tükrözésnek nevezzük. A  $v$  lehet nullvektor is. Nyilván azonos az eredmény, ha a tükrözést hajtjuk végre elsőnek. A teljesség kedvéért igazoljuk a következő tételt

7. A sík irányításváltó egybevágóságai csúsztatva tükrözések Bizonyítás: az alábbi három ábrához fűzünk megjegyzéseket



5. ábra

- Ha az irányításváltó egybevágóságnak van két fixpontja,  $F_1$  és  $F_2$ , akkor csak az egyenesükre való tengelyes tükrözésről lehet szó.

- Ha legalább egy fixpontja van, a második ábrán  $F$ , akkor a  $P$  pont  $P'$  képének  $P''$  képét érdemes keresnünk. Ez a  $P''$  az  $F$ -től  $FP=FP'$  távolságra van, a  $P'$ -től pedig, mivel  $PP'$  képe  $P'P''$ , éppen  $PP'=d$ -re. Ezért  $P''$  az ábra szerinti  $Q$  pont, vagy a  $P$  pont lehet. A  $Q$

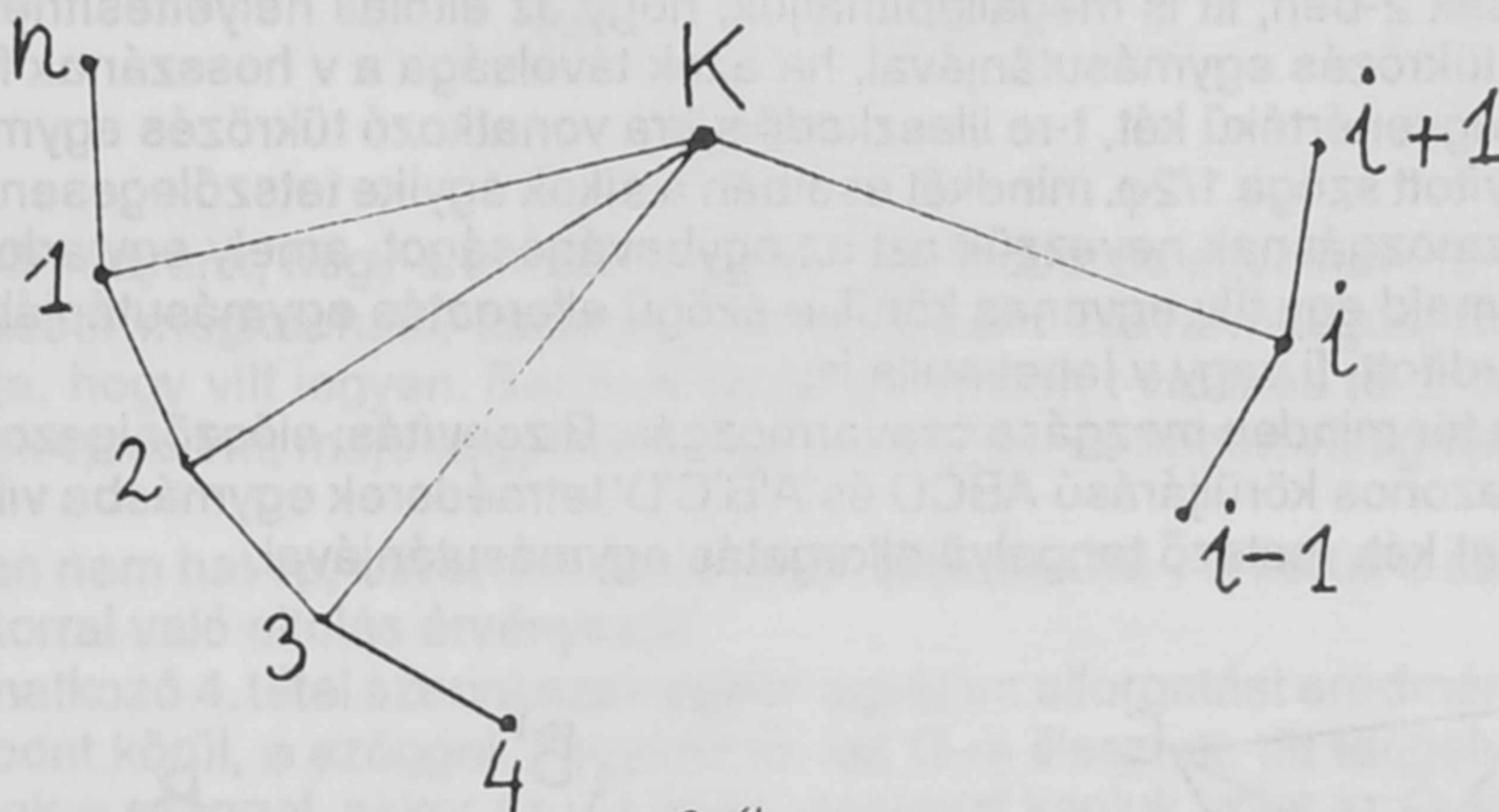
pont nem jó, hiszen  $FPP' \Delta$  képe vele ellentett körüljárású kell legyen, ami  $FP'Q$ -ra nem teljesül. Tehát  $P'' \equiv P$ , mely szerint  $PP'$  képe  $P'P$ , így a szakasz  $F$  felezéspontja fixpont, vagyis a jelzett  $t$  egyenesre tükrözünk. Ha az irányításváltó egybevágóságnak egy fixpontja sincs, akkor vizsgáljuk egy  $PQ$  szakaszt és képét,  $P'Q'$ -t.

Toljuk el  $PQ$ -t a  $PP'=v$  vektorral a  $P'Q_1$  helyzetbe. Értelmezzük a  $P_1P'$ ,  $Q_1 \rightarrow Q'$  irányításváltó leképezést, amelynek  $P'$  már fixpontja, tehát az előző ábrának megfelelően ez a leképezés a  $Q_1P'Q'$  szög  $t_1$  felezőjére való tükrözés. Bontsuk a  $v$  vektort  $t_1$ -gyel  $\parallel$  és  $\perp$  összetevőkre, az elsőt jelölje  $v_{\parallel}$ . Ez a  $P$  pontot a  $P_{\parallel}$  pontba tolja. Ha  $P_{\parallel}P'$  felező merőlegesét  $t$ -vel jelöljük ( $t \perp t_1$ ), akkor a kiindulási  $PQ$  szakaszt a  $v_{\parallel}$  eltolás, majd  $t$ -re való tükrözés tehát csúsztatva tükrözés viszi  $P'Q'$ -be.

8. Kérdés: A sík egybevágóságainak előállításához hány tükrözés elégséges?

## A szabályos sokszögek szimmetriái

Mivel most a  $K$  sokszög önmagára képződik le,  $K$  középpontja helyben kell maradjon. A 4. és 7. pont szerint csak a  $K$  körüli forgatás és a  $K$ -ra illeszkedő tengelyű tükrözés jöhet szóba, ezeknek invariáns pontja  $K$ . A vizsgált egybevágósági leképezést adjuk meg  $K$ -val és az 1, 2 csúcsokkal:  $K 1 2 \rightarrow K i (i+1)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , ezeket a  $K$  körüli  $360^\circ/n$  egész többszöröseivel forgatva kapjuk. Irányításváltók  $K 1 2 \rightarrow K i (i+1)$ , ezeket pedig az 1,  $i+1$  pontok ( $K$ -ra is illeszkedő) felező merőlegesére tükrözve (is) megkaphatjuk. Kaptunk tehát  $2n$  szimmetriát, ebből  $n$  a mozgás és  $n$  az irányításváltó.



6. ábra

Megállapítható, hogy a mozgások mind különböznek egymástól, hiszen az 1 csúcs helyzete más-más, hasonló okból az irányításváltók sem lehetnek azonosak. Egymástól a körüljárásuk miatt különböznek, következésképp a szimmetriák száma legalább  $2n$ . Nincs több sem, hiszen bármely szimmetriában  $K$  a helyén marad, 1 valamelyik csúcsba kerül, 2 pedig követi vagy megelőzi a pozitív körüljárás szerint, ezeket az eseteket viszont mind figyelembe vettük.

A szabályos  $n$ -szögnek pontosan  $2n$  szimmetriája van, melynek fele mozgás.

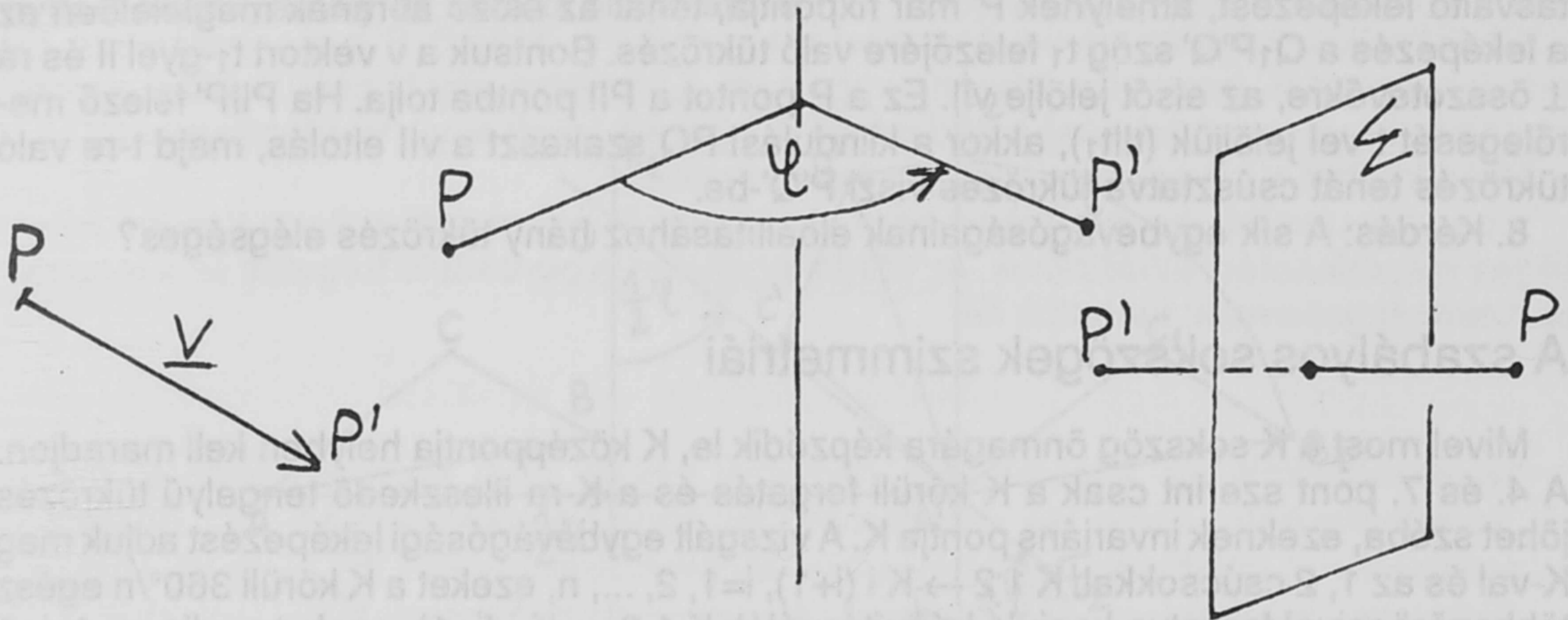
9. Kérdés: szabályos sokszög egybevágóságában  $K 3 5 \rightarrow K 1 7$  mozgás-e? Adjunk meg olyan egybevágósági transzformációt, amely ezt megvalósítja! A síkbeli eset részletes tárgyalásának előnyeit majd most láthatjuk, mivel a térbelit teljesen analóg módon vizsgáljuk.

## A térbeli egybevágósági transzformációk

Meghatározza négy, nem egysíkú pont és a képük, tehát valamely  $ABCD$  és  $A'B'C'D'$  tetraéderpár. Irányítástartó, ha  $A$ -ból nézve  $BCD \Delta$  körüljárása ugyanolyan, mint  $A$ -ból

nézve BCD  $\Delta$ -é, irányításváltó, ha fordított. A tulajdonság nem függ a választott teraéder-től vagy csúcstól.

10. Értelmezünk néhány egybevágóságot és – legalábbis a mozgásokra – megmutatjuk, hogy ezek, és bizonyos egymásutánjaik az összes lehetségeset kiadják.



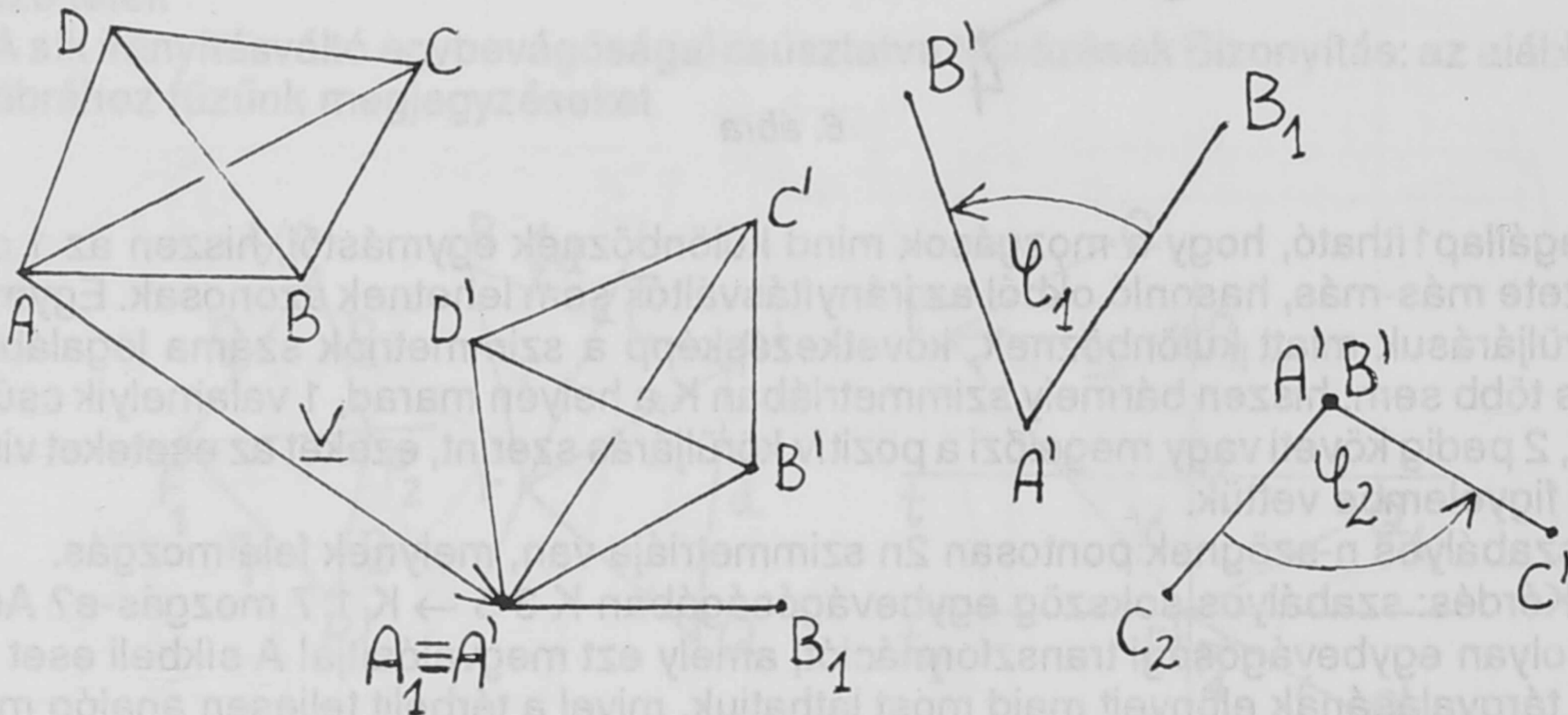
7. ábra

Az eltolás és a t körüli  $\varphi$  szögű forgatás ( $PP \perp t$ ) mozgások, míg a síkra tükrözés irányítást vált.

11. Akárcsak 2-ben, itt is megállapíthatjuk, hogy az eltolás helyettesíthető kettő,  $v$ -re  $\perp$  síkra való tükrözés egymásutánjával, ha azok távolsága a  $v$  hosszának fele. Az elforgatás pedig egyenértékű két,  $t$ -re illeszkedő síkra vonatkozó tükrözés egymásutánjával, ha azok irányított szöge  $1/2\varphi$ . mindkét esetben a síkok egyike tetszőlegesen választható.

12. Csavarmozgásnak nevezzük azt az egybevágóságot, amely egy adott  $v$  vektorral való eltolás, majd egy tlv egyenes körüli  $\varphi$  szögű elforgatás egymásutánjából áll. A sorrend lehet fordított, fi vagy  $v$  lehet nulla is.

13. Tétel: a tér minden mozgása csavarmozgás. Bizonyítás: először igazoljuk, hogy az egybevágó, azonos körüljárású ABCD és A'B'C'D' tetraéderek egymásba vihetők egy eltolás, valamint két, metsző tengelyű elforgatás egymásutánjával.

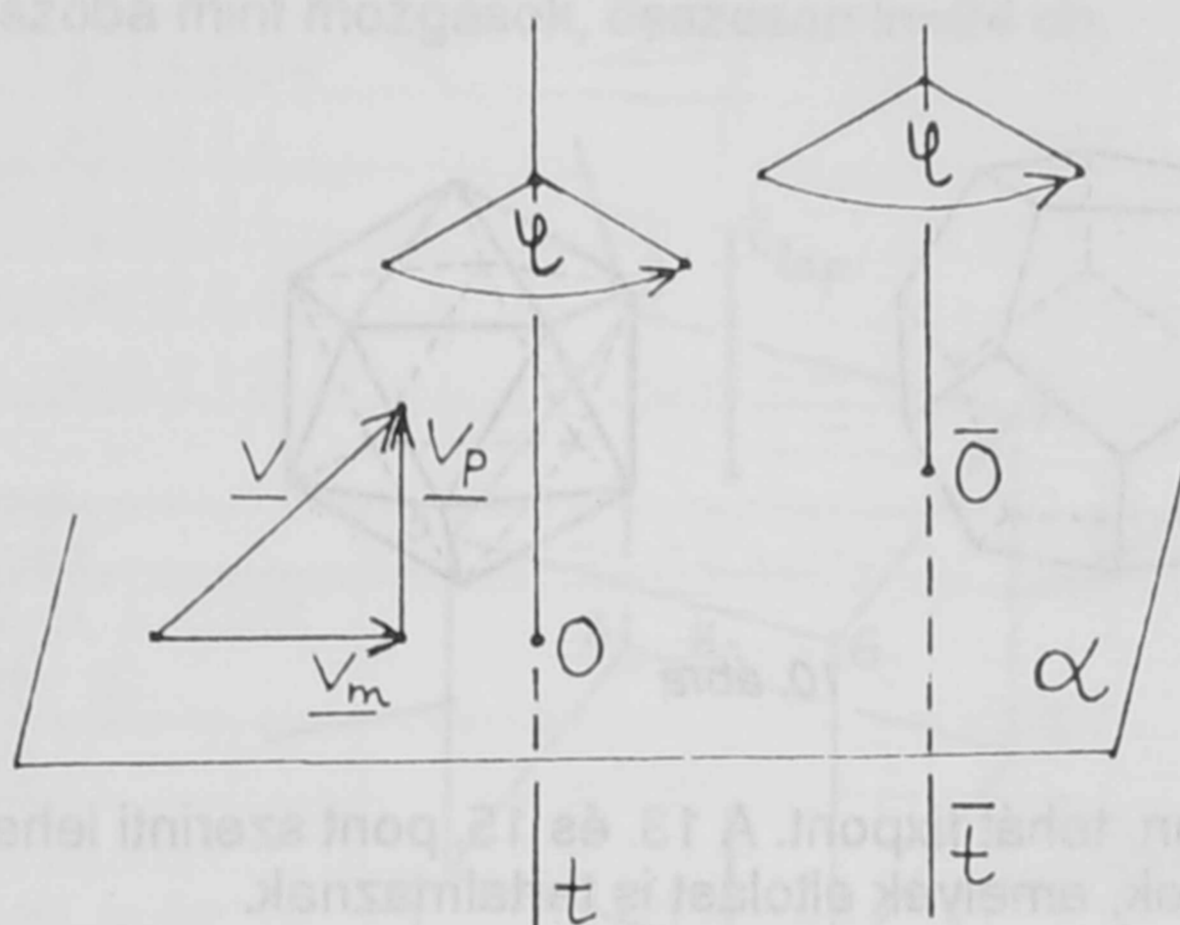


8. ábra

Valóban, ha egy  $v=AA'$  eltolást alkalmazunk, majd a B képeként adódó  $B_1$ -et az  $A'B_1B'$  síkjára  $\perp$ ,  $A'$  ponton átmenő  $t_1$  tengely körül a  $\varphi=B_1A'B'$  szöggel a  $B'$ -be forgatjuk. Ekkor már a két tetraédernek egy megfelelő élpárja  $AB$  és  $A'B'$  egymásra került, miközben a C pont valamely  $C_1$ , majd  $C_2$  helyzetbe jutott. Most a  $B'A'$  egyenes legyen a  $t_2$  tengely és forgassunk körülötte a  $C_2A'B'$  és a  $C'A'B'$  síkok  $1/2\varphi$  szögével, amikor is  $C_2$  csak  $C'$ -be,

az irányítástartás révén pedig D csak D'-be kerülhet. Mivel  $t_1$  és  $t_2$  is átmegy az A' ponton, segédtevéletünket igazoltuk.

Második lépésként a két forgatást tükrözésekre váltjuk át:  $t_1$  helyettesíthető  $\Sigma_1$  és  $\Sigma_2$ -re való tükrözéssel, ha ezek irányított szöge fele a forgatás szögének. Legyen a választhatóság alapján,  $\Sigma_2 \equiv [t_1, t_2]$  síkkal.  $t^2$  helyettesíthető jól választott  $\Sigma_1$  és  $\Sigma_2$  síkokra tükrözéssel, legyen  $\Sigma_1 \equiv [t_1, t_2]$  sík. így aztán (föltehetően Euler ötlete alapján) azt kapjuk, hogy a két tengely körüli forgatás jobbról balra írva a sorrendet  $\Sigma_2 \times \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \Sigma_1$  tükrözéssel egyenértékű, melyből  $\Sigma_1 \times \Sigma_2$  a  $[t_1, t_2]$ -re kétszeri tükrözés, tehát azonosság, elhagyható. Adódik tehát, hogy a transzformáció eredője a  $\Sigma_2 \times \Sigma_1$  transzformáció, amely a metszéspontjuk körüli, a szögük duplájával való forgatással egyenértékű. Legyen  $\Sigma_2 \perp \Sigma_1 = t$  és a szög  $\varphi$ .



9. ábra

Eddigi eredményünk, hogy a térbeli mozgás  $v$  eltolásból és egyetlen  $t$  tengely körüli  $\varphi$  szögű forgatásból megkapható, csak hogy ez még nem csavarmozgás, hiszen semmi sem biztosítja, hogy  $v$ llt legyen. Bontsuk tehát a  $v$  vektort  $t$ -vel  $\parallel$  és  $\perp$  összetevőkre, legyenek ezek  $v_p$  és  $v_m$ , majd vegyünk föl egy  $\alpha \perp t$  síkot, és ebben vizsgáljuk meg, hogy mi történik.

Az a síkban nem hat  $v_p$ , mivel  $\perp \alpha$ -ra, itt tehát csak az  $O=t$  körüli  $\varphi$  szögű forgatás és a  $v_m$  vektorral való eltolás érvényesül.

A síkra vonatkozó 4. tétel szerint ezek együtt egyetlen elforgatást eredményeznek, egy bizonyos  $O$  pont körül,  $\varphi$  szöggel. Vegyünk föl két  $O$ -ra illesztett,  $t$ llt tengelyt. Ha most e körül forgatunk  $\varphi$  szöggel, akkor az  $\alpha$  síkban ugyanazt kapjuk, mint az  $O$  körüli forgatás és a  $v_m$  eltolás együttese, tehát az eredeti, térbeli transzformáció  $t$  irányú ( $\alpha$ -ra  $\perp$ ) vetülete szempontjából  $v_m$  már nem játszik szerepet. Következik tehát, hogy maga a  $v$ -vel és  $(t, \varphi)$ -vel adott transzformáció  $v_p$  és  $(t, \varphi)$  jellemzőkkel adott transzformációval,  $v$ llt révén tehát csavarmozgással megadható. Ezt akartuk bizonyítani.

14. Kérdés: Egy térbeli mozgást tükrözésekkel akarunk helyettesíteni. Hány elégséges belőle? Bizonyítás nélkül fogjuk használni a következőt:

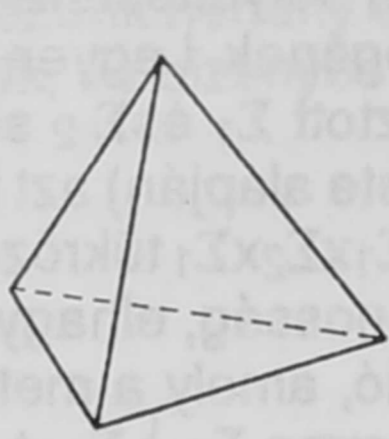
15. Tétel: a tér minden irányításváltó egybevágósága megvalósítható csúsztatva tükrözéssel ( $v$  eltolás és  $\Sigma \parallel v$  síkra tükrözés), vagy forgatva tükrözéssel ( $t$  körüli forgatás és  $\Sigma \perp t$  síkra tükrözés). Mindkét tétel meglehetősen erős állítást jelent, ha arra gondolunk, hogy két, bárhol a térben elhelyezett tetraéder egymásba viteléről szól.

## A szabályos testek szimmetriái

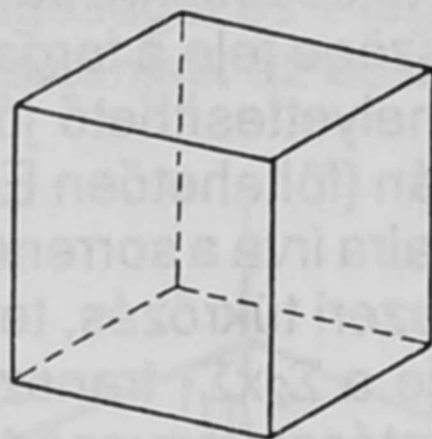
Szabályos az a konvex poliéder, melynek lapjai egybevágó konvex sokszögek és lap-szögei is egyenlők. Ismeretes, hogy ötféle van, a továbbiakban viszonylagos bonyolultságuk miatt a dodekaéderre és az ikozaéderre nem fogunk hivatkozni.

A szabályos testeknek van körülírható gömbje, melynek középpontját egyúttal a test középpontjának is nevezzük. Egy szimmetria során a test önmagába megy át,  $K$  közép-

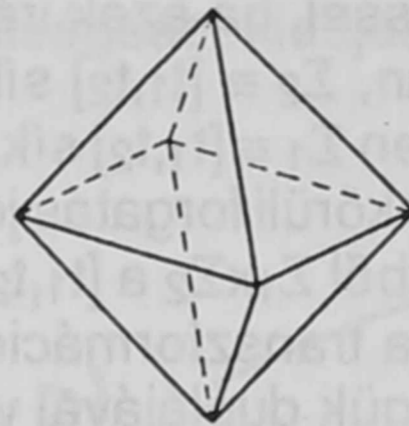
Szabályos testek



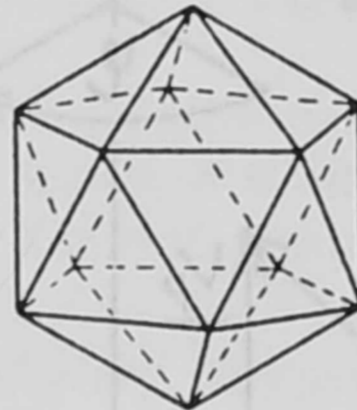
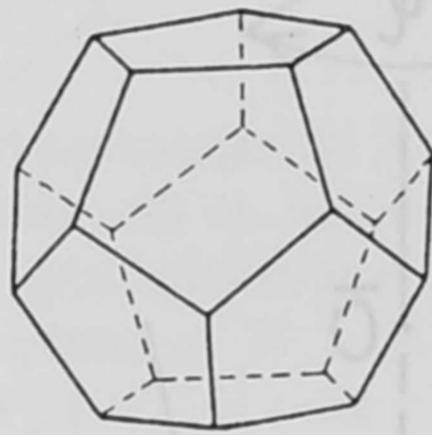
tetraéder



hexaéder



oktaéder



10. ábra

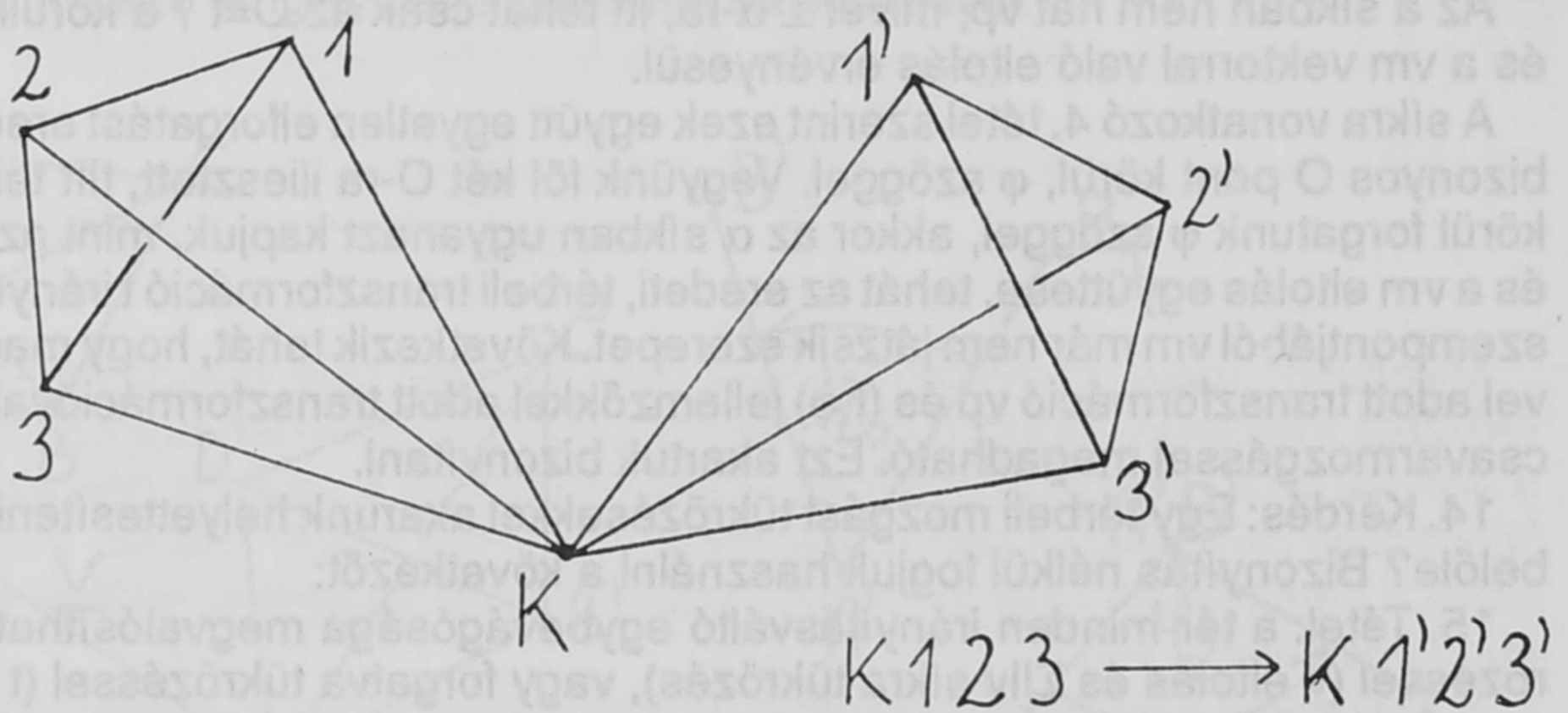
pontja helyben kell maradjon, tehát fixpont. A 13. és 15. pont szerinti lehetséges transzformációk közül kiesnek azok, amelyek eltolást is tartalmaznak.

16. A szimmetria

- ha mozgás, akkor K-n átmenő tengely körüli forgatás,
- ha irányításváltó, akkor K-ra illesztett síkra tükrözés vagy forgatva tükrözés, melynek tengelye, síkja is tartalmazza a K pontot.

17. Tétel: a szabályos testnek, melynek l lapja van és azok szabályos n szögek, pontosan  $2ln$  szimmetriája van, melynek fele mozgás.

Bizonyítás:



11. ábra

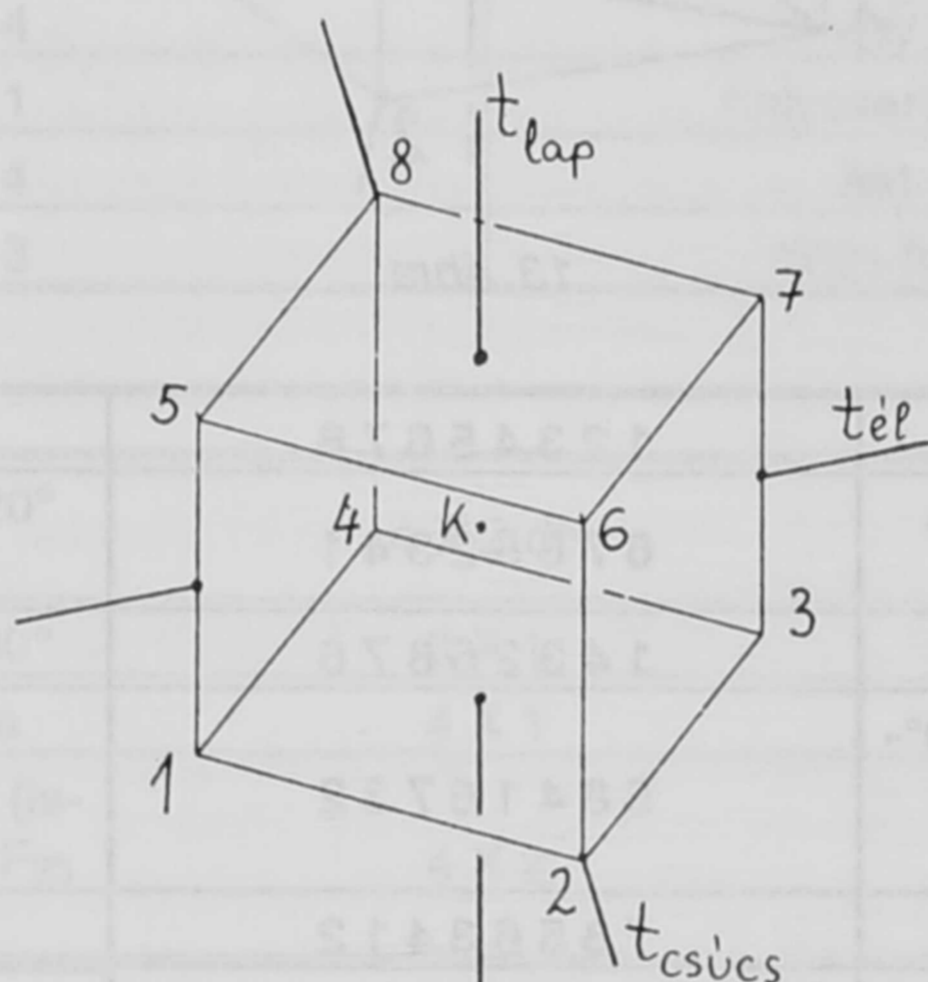
A szimmetriát adjuk meg K-val és valamely kiszemelt lap szomszédos 1 2 3 csúcsaival, amelyek ugyanezen, vagy egy másik lap szomszédos 1'2'3' csúcsaiba mennek át. Legalább  $2kn$  szimmetria van, hiszen például a 2 csúcs az l darab lap bármelyikére kerülhet, egy lap n különböző csúcsába míg 1 és 3 ugyanazon lapon kétféleképp lehet szomszédja (K-ból nézve pozitív vagy negatív körüljárású háromszöget alkotva). Ezek a hozzárendelések mind különbözőek és szerintük a poliéder helyzete egyértelműen meghatározott, önmagát fedi (ezt érdemes részletesen végiggondolni). Legföljebb  $2ln$  szimmetria van, hiszen egy ilyen során a kiszemelt 2-es csúcs az 1 és 3 szomszédaival rákerült az l lap

egyikére, annak  $n$  közül valamelyik csúcsára és 1,3-mal  $K$ -ból nézve pozitív vagy negatív körüljárású. Ezeket az eseteket az előbbi megfontolásban mind számbavettük, tehát éppen  $2ln$  szimmetria van.

### A kocka szimmetriái

Nagyon megkönnyíti a vizsgálódást, ha műanyag bevonatú drótból megcsináljuk egy kocka élvázát.

18. Mozgások, tehát irányítástartók Mivel középpontja helyben marad, a kocka szimmetriája nem tartalmaz eltolást. 16. szerint tehát csak a  $K$ -ra illeszkedő tengelyű forgatások jöhetnek szóba mint mozgások, összesen  $ln=24$  db.



12. ábra

Háromféle tengely jöhet szóba, a  $ll$  lapok középpontjait összekötő  $t_l$  (3 db), az átellenes élek felezőpontjaira fölvett  $t_{él}$  (6 db) és a testátló  $t_c$  (4 db).

Az alábbi táblázat 2. oszlopába az 1, 2, ..., 8 csúcsok helyzetét írtuk be abban az esetben, amikor a vizsgált transzformációtípus lehetséges tengelyei közül éppen az ábrán föltüntetetteket és a kisebb szöget használjuk:

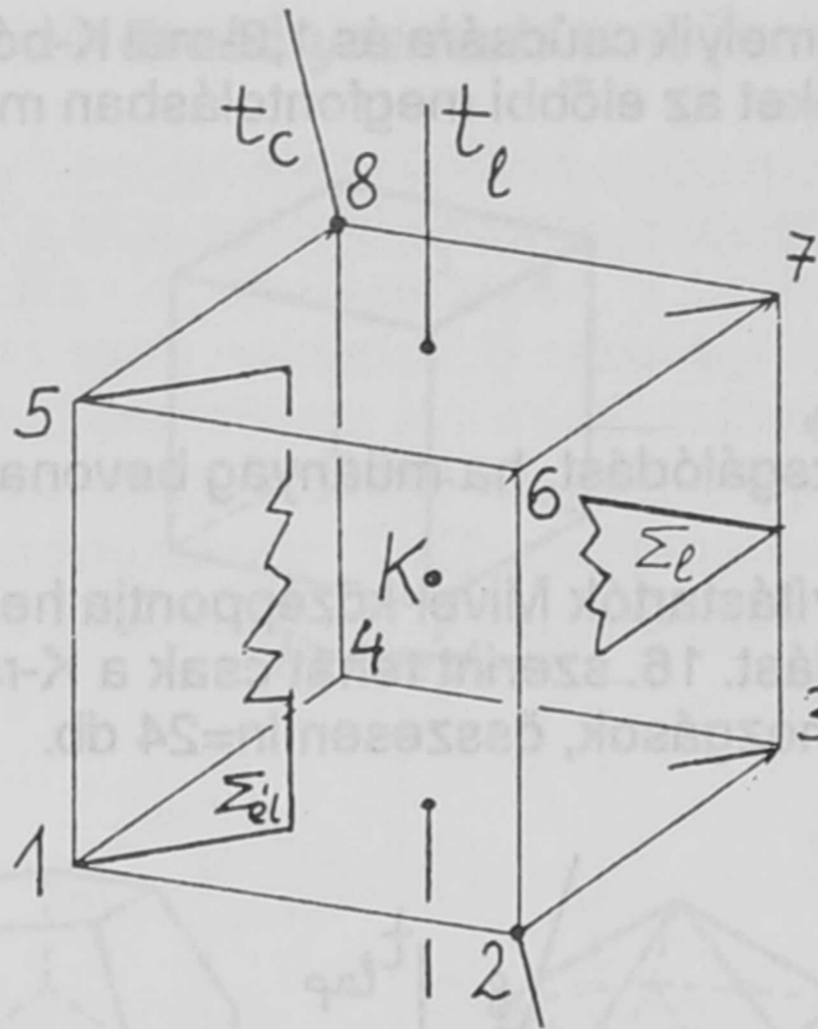
a forgatás tengelye, szöge	1 2 3 4 5 6 7 8	hány ilyen van
$t_l, \alpha = 90^\circ; 180^\circ$ és $270^\circ$	2 3 4 1 6 7 8 5	3 x 3
$t_{él}, \alpha = 180^\circ$	5 8 7 6 1 4 3 2	6 x 1
$t_c, \alpha = 120^\circ$ és $240^\circ$	3 2 6 7 4 1 5 8	4 x 2
helybenhagyás	1 2 3 4 5 6 7 8	1
		24 db

Hogy ezek mind különbözők, azt legegyszerűbben a permutációk fölírásával igazolhatjuk, elég csak 1 2 és 3 képét megadni az egyes esetekben.

19. Irányításváltók A 16. pont szerinti feladatunk a  $K$ -ra illeszkedő síkokra való tükrözések, valamint a  $K$ -ra illeszkedő tengelyű forgatások és rá  $\perp$  síkra való tükrözések mint szimmetriák fölkutatása.

A 13. ábrán  $\Sigma_l$  felezi a  $ll$  éleket

- $\Sigma_{él}$  illeszkedik az átellenes élekre
- hiányzik a  $t_c$  átlóra  $K$ -ban állítható  $\perp$  sík, amely elválasztja 8, 4, 5, 7-et, és 2, 1, 6, 3-at.



13. ábra

A transzformáció	1 2 3 4 5 6 7 8	hány van
forgatás $t_1$ körül $\alpha=0, 90$ és $270^\circ$ -kal + tükrözés $\Sigma$ -ra	6 7 8 5 2 3 4 1	3 X 3
tükrözés $\Sigma_{ei}$ -re	1 4 3 2 5 8 7 6	6 X 1
forgatás $t_c$ körül $\alpha=60$ és $-60^\circ$ -kal + tükrözés 28 felező $\perp$ síkjára	5 8 4 1 6 7 3 2	4 X 2
tükrözés K-ra	7 8 5 6 3 4 1 2	1
		24 db

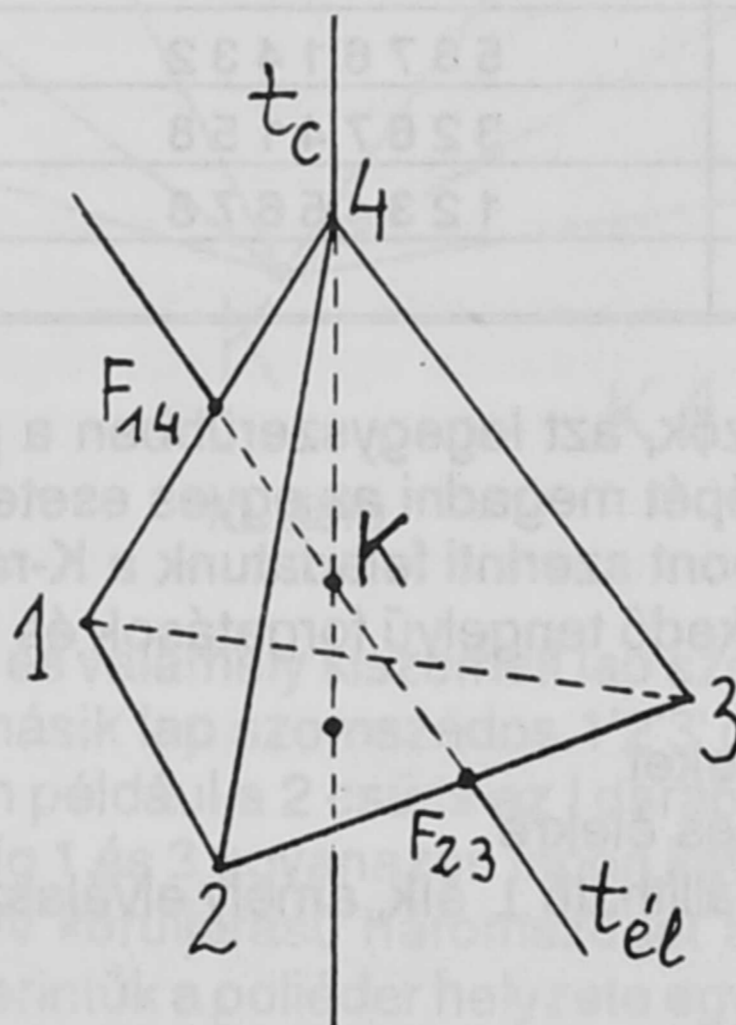
Hogy mind különbözők, azt ismét az 1 2 3 adódó képeinek különbözőségével igazoljuk.

20. Kérdés: Miért nincs  $t_1$  körüli  $180^\circ$ -os forgatás + tükrözés  $\Sigma_1$ -re?

21. Kérdés: Miért nem szerepel a listán a  $t_c$  körüli  $180^\circ$ -os forgatás + tükrözés a 28 felező  $\perp$  síkjára?

22. Kérdés: A kocka  $K$  1 2 3  $\rightarrow$  K 4 8 5 leképezése

- lehet-e egybevágóság?
- ha az, akkor irányítástartó-e?
- írjuk föl mind a 8 csúcs képét
- milyen geometriai transzformáció hozta létre?



14. ábra

## A szabályos tetraéder szimmetriái

Jelölje  $F_{14}$  és  $F_{23}$  a felezéspontokat,  $t_c$  átmegy az  $123 \Delta$  középpontján és  $t_{el}$  az  $F_{14}$ ,  $F_{23}$  pontokon. most  $ln=12$  mozgást és 12 irányításváltót keresünk. Ez éppen egyenlő a csúcsok összes lehetséges permutációjának számával:  $24=4!$ .

Akármilyen sorrendben írjuk le tehát az  $1, \dots, 4$  számokat, van olyan egybevágósági transzformáció, amely az  $1\ 2\ 3\ 4$  csúcsokat a megadottakba viszi. (A kockánál ez nincs így, hiszen  $48 \ll 8!$ )

Ezen a kerülőúton keressük meg az összes szimmetriát

23. Vizsgáljuk a következő transzformációkat

1 2 3 4 képe	a transzformáció jellemzője
a) 2 3 1 4	egy fixpont, a 4-es
b) 4 3 2 1	helycsérék: $1 \leftrightarrow 4$ és $2 \leftrightarrow 3$
c) 1 3 2 4	két fixpont: 1 és 4
d) 2 4 1 3	nincs fixpont, sem csere

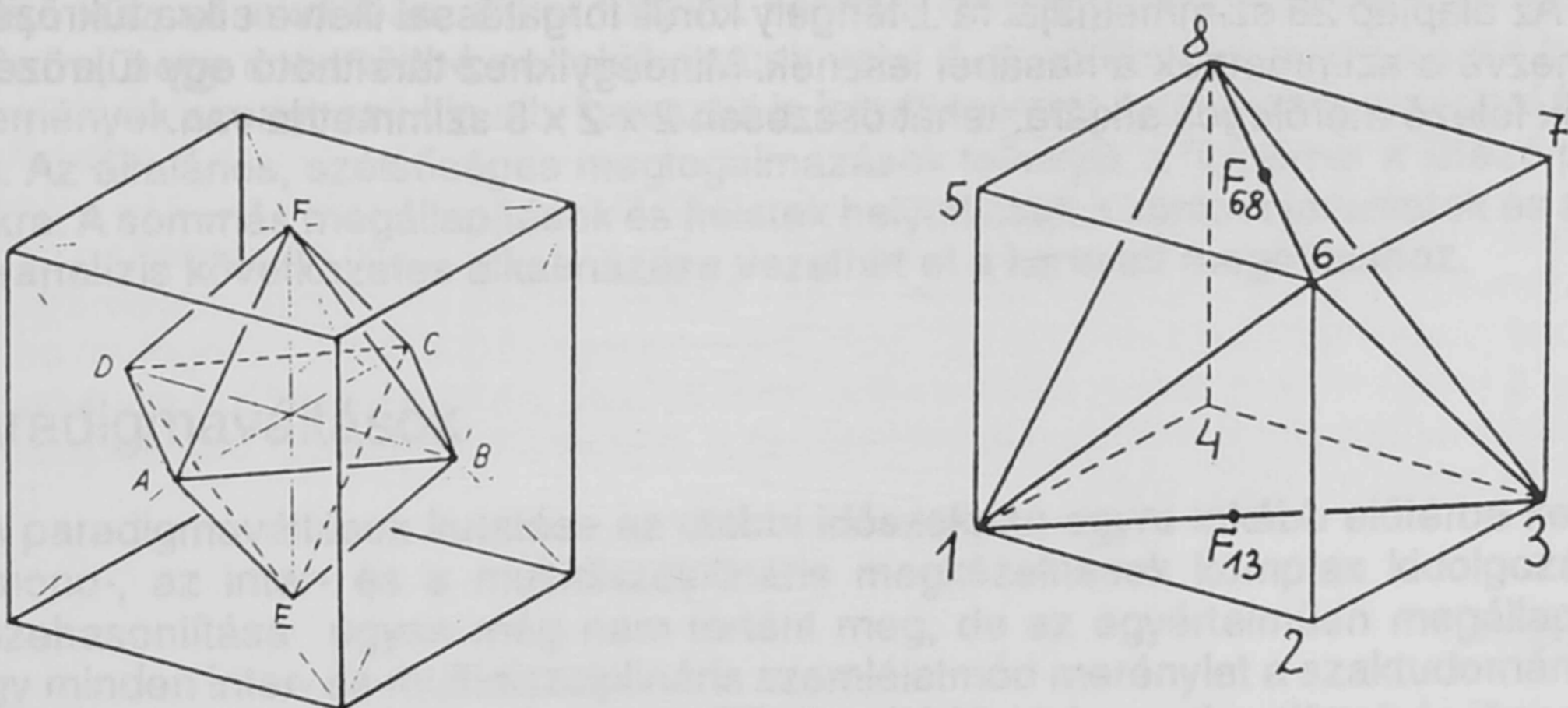
Kitalálható, hogy

a) forgatás $t_c$ körül, $\alpha = 120^\circ$ (lehet $240^\circ$ is)	4 X 2 db	mozgás
b) forgatás $t_{el}$ körül, $\alpha = 180^\circ$	3 X 1	mozgás
c) tükrözés $14F_{23}$ síkjára	4 X 1	irányváltó
d) forgatás $t_{el}$ körül, $\alpha = 90^\circ$ (lehet $-90^\circ$ is) + tükrözés $F_{14}F_{23}$ felező $\perp$ síkjára	4 X 2	irányváltó

Ezekhez hozzávéve a helybenhagyást, megkaptuk a  $12+12$  keresett szimmetriát.

## A szabályos oktaéder vizsgálata

Ezt a testet úgy is megkaphatjuk, hogy a térbeli derékszögű koordinátarendszer tengelyein levő  $m$  pontok konvex burkát vesszük. Hasonlóan egyszerű a kocka lapközéppontjainak összekötésével való származtatást:



15. ábra

Az ábra második kockájába az 1 3 6 8 szabályos tetraédert írtuk le. Látható, hogy ennek élfelező pontjai, például  $F_{13}$  vagy  $F_{68}$  éppen a kocka lapközéppontjai, tehát a szabályos tetraéder élfelező pontjai szabályos oktaédert adnak. Mindez lehetővé teszi a három test szimmetriáinak együttes vizsgálatát.

A kockához értelmezett  $t_1$ ,  $t_{el}$  és  $t_c$  tengelyek segítségével az oktaéder szimmetriáit is megtalálhatjuk. Ezek száma  $283=48$ , így elég valószínű, hogy a két test szimmetriái ugyanazok a transzformációk.

24. Feladat: Bizonyítsuk ezt be Ha a jobb oldali kockát forgatjuk 17 átlója körül  $120^\circ$ - vagy  $24^\circ$ -kal, akkor a tetraéder is önmagába megy át, 1 csúcsa fix, 6 3 8 lapján pedig ciklikusan változik a csúcsok helye. Ez tehát egyszerre mindkét test szimmetriája. Nem ez a helyzet, ha például 23 és 58 felezéspontjaira illeszkedő éltengely körül forgatnánk el  $180^\circ$ -kal, mivel ekkor a tetraéder 3 csúcsa a 2 pontba kerülne, ami nem tartozik a tetraéderhez, ez tehát nem szimmetriája.

25. Kérdés: Melyek a kocka azon mozgásai, amelyek egyúttal a tetraéderéi is? A következő szabályos testbe, a dodekaéderbe mind a négy másik: tetraéder, kocka, oktaéder és ikozaéder is beírható. Könnyen elképzelhető, hogy 6+6 szimmetriájának a többiével együtt való vizsgálata milyen sok további kérdést vet föl.

Befejezésül vizsgáljunk meg egy nem szabályos testet:

26. Kérdés: Hány szimmetriája van egy szabályos nyolcszög alapú egyenes hasábnak?

## Megoldási javaslatok, válaszok a kérdésekre

3. Irányított szakaszok vagy szögek használatával helyzetétől függetlenül bármely P pontra igazolható az állítás.

5. Ekkor  $\varphi=180^\circ$  és  $F_2$  az  $AA'$  szakaszra kerül, tehát O annak felezéspontja- középpontos tükrözés.

8. Kettő, ha mozgás és 1 vagy 3 ha irányításváltó.

9. Szimmetria, de nem mozgás. Tükrözés az 13 felező  $\perp$ -ére.

14. A csavarmozgás eltolás részéhez 2, az elforgatáshoz szintén 2 kell, tehát legfőljebb 4 tükrözés elég.

20. Az eredmény a K-ra tükrözéssel azonos.

21. Ez is K-ra tükrözés

22. Egybevágóság, mert 485 is egy lap szöge 48513762

igen, mert K-ból nézve a két  $\Delta$  irányítása egyező  $F_{14}$  és  $F_{67}$ -re illeszkedő éltengely körüli forgatás

24. A 18 és 19-beli listák transzformációinak végrehajtásával, az oktaéder ABCDEF csúcsainak permutációival bizonyítható.

25. Vessük egybe a 18 és 23 pont listáit, alkalmazzuk a kockába írt tetraéder ábrájára:  $t_1$  körül  $180^\circ$ -os,  $t_c$  körül  $120^\circ$ -os és  $240^\circ$ -os forgatások és az azonosság.

26. Az alaplap 28 szimmetriáját rá  $\perp$  tengely körüli forgatással illetve síkra tükrözéssel értelmezve a szimmetriák a hasábéi lesznek. Mindegyikhez társítható egy tükrözés az alkotók felező merőleges síkjára, tehát összesen  $2 \times 2 \times 8$  szimmetria van.

