

Sejtautomaták Fibonacci-növényeken át

BÉRCZI SZANISZLÓ

Korábbi írásunkban a sejtautomatákat úgy mutattuk be, mint mozaikalkotó „egyeniségeket”, egyveretű belső tulajdonságokkal. Akkor a Descartes koordinátarendszertől indítottuk ismertetésüket: azt mondtuk, hogy a sejtautomaták mozaikja eleven, megmozduló háttérként viselkedik a Descartes koordináták „merevségével” szemben. A hagyományos fizikai kép megnevezéseivel azt is mondhajtuk, hogy a sejtautomatákból alkotott mozaikfelülettel a deformálódó felület sejtjeihez rögzített koordinátarendszerhez jutottunk. A sejtek mozaikjához rögzített koordinátarendszerrel nemcsak lehetővé, de szükségszerűvé válik az, hogy a felület állapotváltozásait részben belefogalmazzuk (beleolvasszuk) a vonatkoztatási rendszerbe. Ezzel azonban nyitlta is válik a kérdés: mi képez még vonatkoztatási rendszert és mi képezi már a leírásra váró állapotváltozás mozgásegyenletét?

Vonatkoztatási rendszer és leírandó jelenség szétválasztása

Kétségtelen, hogy a klasszikus mechanika is ismeri az „együtt mozgó koordinátarendszer” fogalmát (s például az égimechanikában kiterjedten alkalmazza). Ott azonban ez a transzformáció két merev koordinátarendszer egymáshoz viszonyított mozgását iktatja be az eredeti merev háttér és a jelenségleírás közé. Ezzel a mozgásleírás még nem válik kétrétegűvé, hiszen a merev két koordinátarendszer közötti átalakítás (áttérés) beépíthető a hagyományos képű mozgásegyenletbe. A sejtautomata mozgásleírási forma azal, hogy eleven szemcsékre bontja az EGÉSZt, új mozgásleírási szintet is teremt. A sejtautomaták környező sejtállapotoktól, előző állapottól és belső programtól függő állapotváltozásai megőrzik ugyan a kezdeti feltétel+peremfeltétel+mogzásegyenlet változásleírási szerkezetet, de az általuk nyitott új hierarchiaszint lényegében megkettőzi a mozgásleírás lehetőségét. E megkettőzéssel a változásleírás kétrétegűvé válik: a SEJTek rétegén történő és az EGÉSZ hierarchiaszintjén történő. E kétrétegűséggel azonban össze is keveredhetnek a korábbi egyrétegű leírásban tiszta szerepek: mostmár a sejtmozaik háttér, tehát a vonatkoztatási rendszer is mozog, nem csak az alakzatrendszer EGÉSZ. A sejt-háttér rendezett mozgásait így beépítve a vonatkoztatási rendszer szerepét öröklő sejtmozaik-rendszerbe új szempontok figyelembe vételére nyílik lehetőség az állapotváltozás sejtautomata rendszerű leírásában: például a visszacsatolásoknak az EGÉSZt átható rendszerére.

A sejtautomata modell mint leírási forma

Amikor egy jelenséget sejtautomata modellel írunk le, egy újszerű leírási formát használunk föl a jelenség bizonyos jellemző vonásainak kiemelésére. A sejtautomata modell, mint leírási forma, jobban kidolgozza azt a háttérret, amelyen az átalakulási események zajlanak, és két rétegre bontja magának az állapotváltozásnak a leírását is. Valójában az esemény-háttérret is kétszintűnek tekinti. Az egyik háttér-szint lokális: az állapotváltozási eseményekben főszereplő sejteket – alak, környezet, kezdeti értékek – adja meg. A másik háttér-szint globális: a sejtek mozaikot (hálózatot) alkotó együttesét (vagy teret kitöltő tétét) adja meg, vagyis magát az egészében vizsgált felületet.

A sejtfelület állapotváltozásainak leírása is két rétegben történik. Az egyes sejtek szintjén: helyi (lokális) átmeneti függvényel, amely időben egyenletesen következő lépésenként, diszkrét függvényként adja meg a sejt állapotát korábbi állapota, a szomszéd sejtek állapota és a belső program függvényében. A második eseményleírási szint a sejtmozaik rendszer állapotváltozásaié, amely az egyes sejtek lépéseiből összegződik, s időlépésenként létrejövő sejtmozaik-képernyő állapotváltozások sorozataként kerül megadásra (vagy kiszámításra).

A sejtautomata modellben tehát az eseményháttérnek és az állapotváltozások átmeneteinek a megadása is két-két részben történik. Mindkettőben szerepel egy lokális és egy globális rész. Betűpárokkal fölcimkézve e megadási formát, a háttér statikus megadását az *Aa* és az *Ab* pontokkal, az átalakulást átmeneti függvényekkel leíró dinamikus mozgásegyenleteknek megfelelő megadását a *Ba* és *Bb* pontokkal végezzük. (1. ábra)

A sejtautomata modell megadása tehát formailag a következőket jelenti:

Aa a sejtek alakja, lokális kapcsolatai a mozaikhálózatban, kezdeti állapotai

A. A háttér (sejtekből megépítve) *Ab* a sejtekből fölépülő sejtmozaik-rendszerek egész felületet megadó együttese: a globális felületrács, kezdeti paramétereivel

Ba az egyes sejtek lokális átmeneti függvényei, időlépésenként: ez a belső programtól (a sejtek automaták) és a szomszédságtól függ

B. Az átmenetek (átmeneti függvények) *Bb* az egész felület (sejtmozaik hálózat) globális átmeneti függvénye, amely az egyes sejtek lokális átmeneti függvényeiből összegződik időlépésenkénti állapotsorozat formájában

Bár az egyes *a* és *b* pontok nem teljesen függetlenek egymástól, a sejtautomata modell keretei között történő állapotváltozás leírásnak az ereje a lokális és a globális szerkezet és dinamika együttes figyelembe vételéből, kapcsoltságából fakad. Mondhatjuk azt is, hogy a sejtautomata leírásban éppen az eseményeknek ezen a kétrétegűségén van a hangsúly.

Az indirekt Neumann probléma

A sejtautomata modellt *Neumann János* (1966) konstruálta azzal a céllal, hogy a sejtekből, mint belső cselekvési programmal ellátott automatákból összeálló „képernyőn”, a sejtmozaikrácsra, önreprodukáló gépeket állíthasson össze. Az önreprodukáló gép megalkotása során végzett problémamegoldási út a következő. Előre elkészített és programozható sejteket alkotunk, majd belőlük olyan szomszédsági kapcsolatú, és belső programsorsú sejtmozaik együttest, amely globális átmeneti függvényének mozaiklépéseiben, „képernyő-filmjében” produkálja az önreprodukáló gépet. A konstruálási irány tehát a lokális átmeneti függvényektől elindulva vezet a globális átmeneti függvényben megfogalmazódó célig. Előzőleg megadott szimbólumainkkal tehát az eredeti Neumann probléma, a direkt Neumann probléma *Ba* → *Bb* irányú.

Abban a képből, melyet mi formálunk dolgozatunkban, a cél az, hogy a sejtmozaikhálózatban, mint képernyőn megfigyelhető, és lépésenként változó állapotváltozásokból: olvassunk. A képernyőn végbemenő változásokat tekinthetjük egy sejtmozaik-automata globális átmeneti függvényének, mert időben diszkrét lépésekre bontva jelennek már meg előttünk. A Neumann-féle sejtautomata modell szerkezetének ismeretében, vizsgálatainkban azt a célt tűztük ki, hogy fölbontsuk e fölsímet globális átmeneti függvényt egyes sejtekre vonatkozó lokális átmeneti függvényekre. E törekvésünket a sejtautomata modell megadására használt szimbólumainkkal tehát így fogalmazhatjuk meg: *Bb* → *Ba* irányú problémamegoldásunk. Mivel ez az irány a Neumann-féle konstruálási irány

A sejtautomata modell mint állapotváltozást leíró keret	Lokális	Globális
Háttér	Aa a sejtek alakja, elemi környezete (kapcsolatai), kezdeti állapota	Ab a sejtsohaság (a sejtmozaik-rendszer) együttes: a felület (v. tartomány); a felület kezdeti paraméterei
Átmenet	Ba a sejtek állapotátmenetei, időlépésenként: lokális átmeneti függvény; függhet a környező sejtek állapotától a sejt korábbi állapotától és a sejtbe írt programtól	Bb a sejtegyüttes sejtmozaik-hálózatot alkotó felületének (v. tartományának) globális átmeneti függvénye: ez az egyes sejtátmenetekből összegződik, időlépésenként
	Első (mélyebb) hierarchiaszint	Második (magasabb) hierarchiaszint

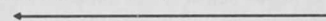
működéskonstruálás

direkt Neumann probléma



visszaolvasás-állapotváltozás leírása

indirekt Neumann probléma iránya



1. ábra

Relációáblázat a sejtautomata modell megadásáról

ellentétes nevezhetjük választott programunkat az indirekt Neumann probléma egy speciális esetben történő megoldásának.

Kéthierarchiaszintes mozgásegyenlet

A sejtautomata modell kétrétegű természetét más irányból is megvilágíthatjuk. Képezük le a megfogalmazott négy modell-pontot (Aa, Ab, Ba, Bb) a klasszikus változás-leírás hasonló módon tagolt modellpontjaira.

Az eseményleírás formájaként a klasszikus deformációs mozgás (deformációval együttjáró állapotváltozás) esetén a következő modell-pontokat használjuk leíráskeretként. Nevezzük őket rendre Ca, Cb, Cc, Cd, Ce pontoknak, ahol Ca a koordináta-rendszert adja meg, Cb a kezdeti feltételeket, Cc pedig a peremfeltételeket; Cd-re egy olyan pontot jelölünk ki, amely valamely belső vagy külső visszacsatolós természetű beavatkozás az eseményláncolatban (ez a pont egyszerű mozgásleírásokban gyakran hiányzik), Ce pedig maga a klasszikus mozgásegyenlet. Célunk ezzel a leképezéssel csak a sejtautomata modell gondolkodásmódjának a rávetítése volt a hagyományos kialakultra. Az ábra relációáblázatából jól látható, hogy erős a kapcsoltság az A (háttér) és a B (átmenetek) oszlopai között a sejtautomata modellben. A klasszikus leírásba bevett visszacsatolási pont az, amely megvilágítja a „kétrétegű” háttérnek és a kétrétegű eseményleírásnak a kapcsolatát is. A visszacsatolás ugyanis részben szerkezeti, részben működési (mozgásegyenletbe fogalmazott) a sejtautomata modellben.

A sejtautomata modell kétrétegűséget kiemelő relációáblációján a mátrixelrendezés kiemeli azt, hogy mind a lokális, mind a globális kép háttér + mozgásegyenlet kapcsolatú, s ebben az értelemben klasszikus alapú. Újdonság azonban a kettő párhuzamosan futó volta, az ezáltal kapcsoltság. (2. ábra)

		A sejtautomata modell, mint formai keret a sejrendszer állapotváltozásainak a leírására			
		Sejtháttér		Átmeneti függvények	
		Aa-lokális	Ab-globális	Ba-lokális	Bb-globális
Egy sejrendszer transzformációinak klasszikus leírás módja	Koordináta-rendszer	a sejtek alakja, hálózata, mozaikja	a sejrendszer felület invariáns tulajdonságai		
	Kezdeti feltételek	sejtállapotok kezdeti értékeinek meghatározása	a mozaikrács kezdeti paramétereinek meghatározása		
	Perem-feltételek		a felület típusának, topológiájának meghatározása		
	Visszacsatolások a szerkezetbe beépítve		a felületen a visszatérő sávok határozzák meg	sejtszomszéd-sági hatások határozzák meg	
	Mozgás-egyenletek			belső program és szomszéd-sági függés határozza meg	sejtátmenetekből összegződik lépésenként

2. ábra

A klasszikus deformációs mozgás-leírás szerkezetének és a sejtautomata modell kétrétegű mozgásegyszerű szerkezetének összehasonlítása relációtáblázatban. A sejtautomata modell két rétege: a lokális és a globális (vagyis az Aa+Ba és az Ab+Bb) párok) áll össze.

Fibonacci-növényeken át

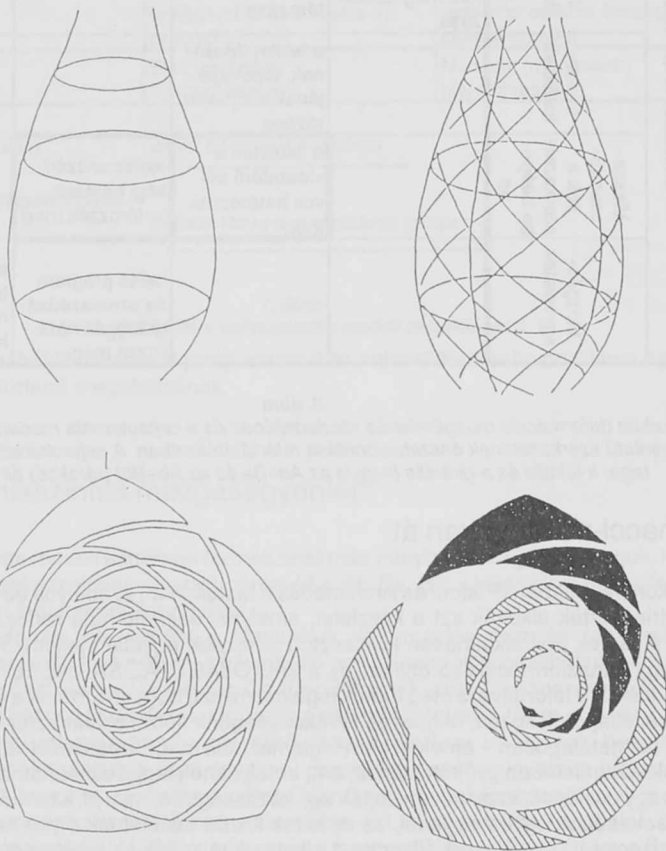
Múltkori írásunkban (Platoni és Archimédészi testeken át) szabályos és féligszabályos geometriai testek alkották azt a készletet, amelyből sejtautomata rendszereinket válogattuk. A testek egy alkalmasan kiválasztott sorozatát egyetlen jellemző művelet fűzte össze egy transzformációs sorozattá. Így, a VÁLTOZÁST FÁZISAIVAL ELVET alkalmazva, sejtműveletekre lefordítva is meg tudtuk fogalmazni azt, hogyan történik a lokális átmenet egyes sejtállapotok között. Mindezen tevékenységünk során alkalmaztunk egy olyan elvet is – hallgatólagosan – amelyet nem fogalmaztunk meg. Tapasztalati elv ez, olyan sokaságok vizsgálatában gyűjtött tapasztalat, amelyeknek tagjai változhatnak. (Például közetek, vagy csillagok, vagy növényfajták egy közösségben, mint pl. az erdők stb.) Az ilyen egyed-sokaságok egyes egyedei, az egészek között találhatunk olyan néhányat, amelyek fázisonként, de diszkrét állapotsort alkotva kirajzolják az egyes egyedek fejlődési útját. Nevezhetjük ezt az elvet a SOKASÁGBÓL (POPULÁCIÓBÓL) FEJLŐDÉSSORT ELVnek. Például az erdő fái közül ki tudunk választani 20-30 olyat, amelyek a csemeterkörtől a korhadt kidőlt fáig durva lépésenként fölrajzolják egy fa életútját. Hasonló fejlődéssort, megfelelő időléptékkal, közetekre, más tárgykörben pl. egy csillaghalmaz csillagaira is föl tudunk vázolni. Ilyen hipotetikusan fejlődési sort fogunk fölvezetni következő példánkban is, előre bocsátva azt, hogy kétféle időléptékkal is megvalósulhatnak, legalább is bizonyos szakaszai, a fejlődési sorban vázolt átalakulásoknak.

Mostani vizsgálatunk tárgyai a Fibonacci-növények. Közülük már eleve típusokat válogatunk, szerkezetük szerint, és nem struktúrapárokat hasonlítunk össze, hanem a teljes sorozatot elemezzük abból a célból, hogy az átalakulási műveletet és törvényszerűséget megtaláljuk közöttük. A megtalált globális átmeneti függvényt olvassuk aztán át

lokális átmeneti függvénybe. A döntő különbség tehát az a Fibonacci-növények körében található sejtautomata-modell építésénél a Platoni-Archimédésziakkal szemben, hogy most, a Fibonacci-szerkezetből adódóan, a teljes (hozzáférhető, kis Fibonacci-számú) alakzatrendszer-készletet (a Fibonacci-szerkezetű hengermozaik-típusokat) egyszerre elemezzük.

Fibonacci-növényeknek olyan növényeket nevezünk, melyek:

- 1.) globális forgásszimmetriával bíró alrendszerekkel (szervekkel) rendelkeznek,
- 2.) ezen alrendszerek olyanok, hogy felszínükön ismétlődő, egybevágó vagy hasonló elemek sávokat formálva felületi rácsrendszert (rácsmozaikot) alkotnak, olyformán, hogy
- 3.) a balra és a jobbra futó, elemekből összeálló sávok (elemnyi szélességű rész szalagok) száma két szomszédos Fibonacci-szám. (3. ábra)



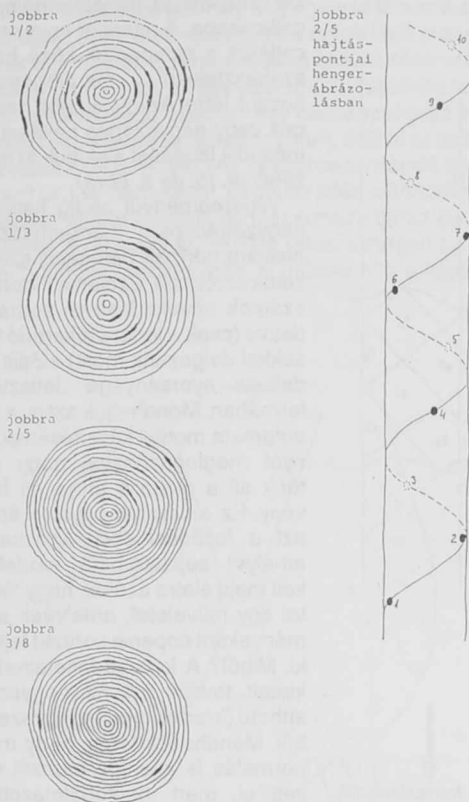
3. ábra

A Fibonacci-növények definíciójában szereplő három alapjellemző:

1. a növényi szerv globális forgásszimmetriája,
2. hasonló elemekből rácsrend a forgástest felszínén, és
3. Fibonacci számú szalagba rendezettség e rácsrendnek.

Az esetek összehasonlíthatóvá alakítása = normálás

A Fibonacci-szerkezet kétféle megjelenési formája a fillotaxis (levélállás) és a tömött növényi rácsok ekvigranuláris mozaikja. A növényrendszertani könyvek tömören így szólnak a fillotaxisról: gyakori az $1/2$ -es, $1/3$ -os, $2/5$ -ös és $3/8$ -ados levélállás (4. ábra). Éles



4. ábra

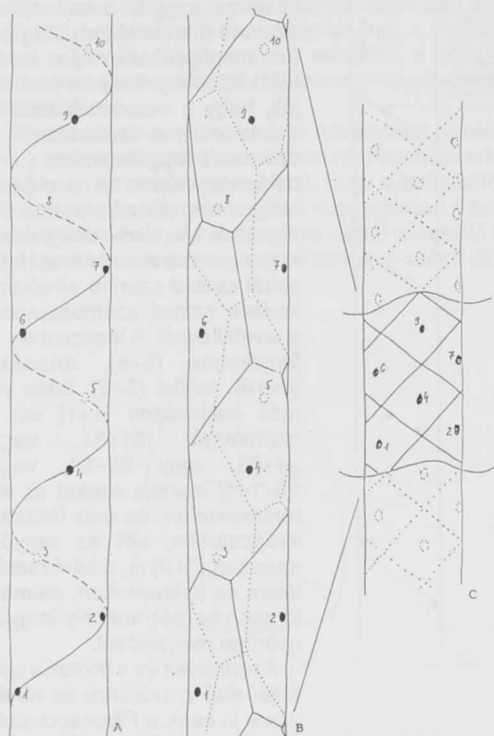
A négy legegyszerűbb (a legkisebb egész számok arányával jellemezhető) fillotaxisú növényi rácstípus (jobbra csavarodó változatok). A tört számmal jelzett levélállás azt jelenti, hogy alulról fölfelé mozogva a szár mentén (kívülről befelé lépdelve az ábrázolt örvéken) a teljes körív jelzett törtrészt kell elfordulni jobbszavar szerint haladva ahhoz, hogy egy tetszőlegesen választott hajtásponttól a magasság szerint következő hajtásponthoz érjünk a legrövidebb úton.

nagyon kis mértékű, a nagyon hosszú szárú, szép levélállású fajoktól eltekintve nem, vagy csak nagyon gondos megfigyeléssel lehet észrevenni. A kétféle megjelenési formát a modellépítés előtt közös alapvonásokkal rendelkező szerkezetűvé kell alakítani.

Döntő különbség mostani vizsgálatunk és a korábbi között az is, hogy most a teljes készlet egészeit, vagyis az összehasonlításra kerülő Fibonacci-szerkezeteket, transzformációkkal kell előállítanunk a természetben előforduló formákból. A közös vonás minden Fibonacci-növényi formában a hengeres szimmetria, ezért hengerfelszíni, de egységesen négyzet alakú mozaik ELEM-eket (=SEJTekeket) tartalmazó mozaikrácsokat alakítunk ki a különféle nyúltságú és kerekességű növényi szervekből (ernyők, torzsák, tobozok és tányéros-összetett virágzatok). Mivel ezek a rácstermészetet nem változtatják, tehát a „sejtek” szomszédsági viszonyai változatlanok maradnak, ezeket a transzformációkat topológiai transzformációknak nevezzük. Magát az egységes sejtalakra hozás műveletét pedig normálásnak hívhatjuk. Ilyen típusú transzformációkat néhány ábrán mutatunk be. E transzformációk közül a legfontosabb a Dirichlet-Voronoy-cella képzés. Ezzel a fillota-

szemmel még 5/13-os is felfedezhető (ökörfarkkóró). De jobban megfigyelve az ilyen levélállású növényeket észrevehetjük, hogy a mondott levélállások is finoman eltérhetnek a szármenti függőlegeshez (meridiánhoz) képest. A termések magvainak, pikkelyeinek; a virágzatok kis elemi virágjainak két, egymással szemben futó spirál család szerinti elhelyezkedése sokkal szembetűnőbb a levélállásnál. A legszebben a fenyőtoboz (5+8), ananász (8+13), karfiol (5+8), búza és más kalászosok (1+1) és a napraforgó (21+34, vagy 34+55, vagy 55+89, vagy 89+144) mutatja ezeket az elrendezéseket, de más fészkes virágzatokon, sőt az ernyős murokon (5+8) is, a kőrózsaféléken és kaktuszokon, pálmák törzsén és még sokhelyütt gyönyörűen megvalósul.

A termések és a fillotaxis spiráljai első gondolatra és ránézésre is csak a Fibonacci-számok kitüntetett szerepében hasonlítanak. Sok növényt alaposan megfigyelve kiderült, hogy a kétféle megjelenés lényegében azonos elrendezési szabálynak engedelmessedik. A növények szárán a nagy transláció eltorzítja, sőt elrejtje ezt. A torzulást az okozza, hogy a mégoly hosszú száron is a nagy transláció miatt csak néhány periódus fér el. Így a periódus elcsavarodását, ami csak



5. ábra

A hengeres pontrácsot mozaikrácsba transzformáló, majd négyzet-mozaik hálózatba normáló művelet sor. A → B: Dirichlet transzformáció: a száron elhelyezkedő hajtáspontok rácsát Dirichlet cellák mozaik-hálózatába alakítja. B → C: Tengelyirányban végzett zsgorítással e Dirichlet-cellák (a pontrács zsgorodása révén) négyzet-mozaik hálózatba alakíthatók. A négyzet-mozaik hálózatra normált Fibonacci növényi mozaikok már összehasonlíthatók szerkezetükben.

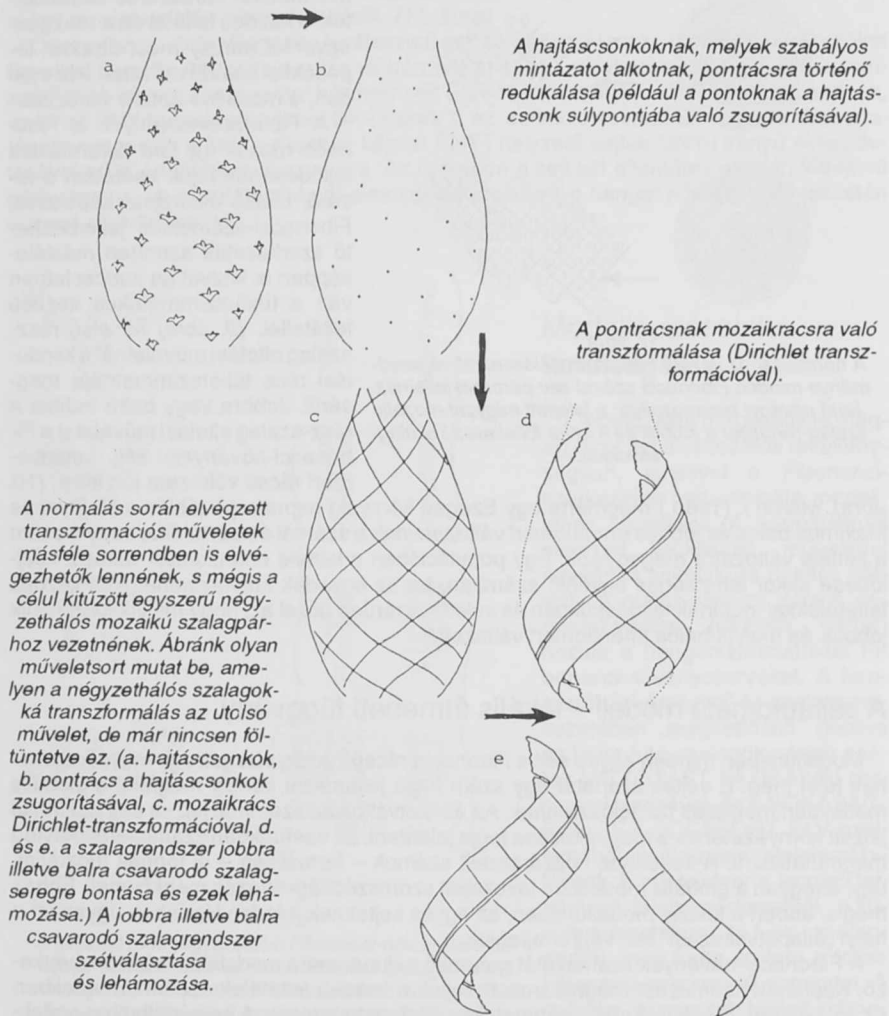
xis rácspontjait transzformálhatjuk cellarácsba. A művelet egyszerű: a cellákat a rácspontok közé húzott szakaszfelező merőlegesekkel hozzuk létre. Az így létrejött hatszöges vagy négyszöges cellákat egy második lépéssel alakítjuk át négyzetekké. (5. és 6. ábra)

Végeredményül pedig kapjuk a négyzetrácsos hengerfelszínek alakjára normált Fibonacci szerkezetek sorozatát. Ezeket a Fibonacci számok növekedésével sorbarendezve (csak a jobbra tekeredő típusokkal dolgozunk most) előállt modellünk nyersanyaga „letisztított” formában. Mondhatjuk azt is, a sejt-automata modell készítésének igényét megfogalmazva, hogy előtünk áll a globális átmeneti függvény. Ez a sorozat ugyanis éppen azt a fejlődési sort tartalmazza, amelyet sejt-automata modellünk kelt majd életre azáltal, hogy fölmutat egy műveletet, amelynek eredményeként éppen e sorozat fejlődik ki. Miből? A kezdeti feltételnek tekintett, tovább egy nem egyszerűsíthető (irreducibilis) legegyszerűbből. Mondhatjuk tehát, hogy már a normálás is jelentős munkát végzett el, mert megfogalmazott és részben meg is oldott egy ebben az alakban fölvetett problémát. A sorozat élére ugyanis csak a búzaka-lász szerkezetéből kapott 1+1-es szalagpár kerülhet. Ez éppen az az egyetlen alakzat a sorozatban, amely tükörszimmetriával rendelkezik.

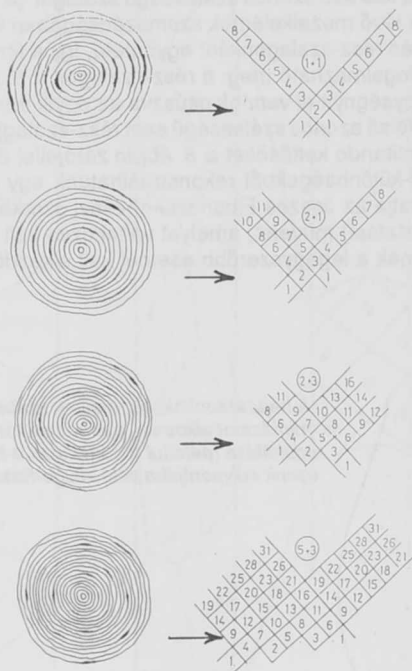
Modellépítés, műveletkiolvasás – a globális átmeneti függvény

Gyűjtjük össze az összes olyan normált Fibonacci-rácsot, amely 8, vagy ennél kisebb Fibonacci számmal jellemezhető. Ezeket fogjuk fölhasználni a modellépítésben, a művelet-kiolvasásban. A normálás során rácsrendben elhelyezkedő ismétlődő elemeiket négyzet-cellákba transzformáltuk, megszámoztuk a száron elfoglalt magasságuk szerint őket. Fölhasítottuk a normált hengerfelületi mozaikrácsokat egy-egy jobbra illetve balra föltekeredő sávszél mentén és kiterítettük a síkra az így kapott szalagokat. Válasszuk most szét a jobbra illetve a balra futó (így tehát ugyanazt a rácsot kétféle módon jellemző) szalagokat és a növények emelkedő Fibonacci száma szerint rendezzük el egymás alá őket (a 7. ábrán a jobbra 1/2, 1/3, 2/5, 3/8... stb. fillo-taxisú növényekről transzformált rácsok szalagjai vannak fölűntetve). Így az oszlopok az egységnyi szélességű – az 1+1-es rács típusú növényekről lehamozott – szalagokkal kezdődnek és váltakozva szélesednek hol a jobb, hol pedig a bal irányú szalagon.

Hasonlítsuk össze bármely két, egymás fölé eső azonos szélességű szalagot. (8. ábra) Azt találjuk, hogy rész-szalagjaik a rajtuk lévő mozaikelemek szomszédságában különböznek egymástól. E szomszédság eltérés rész-szalagonként egyöntetű, így a törvényszerűség globálisan, a rész-szalagokra fogalmazható meg: a rész-szalagok a 8. ábrán lejjebb elhelyezkedő esetben egy cellaegységnyi el vannak csúsztatva az egyik irányban (minden rész-szalag azonos irányban), a felső azonos szélességű rész-szalagjainak helyzetéhez viszonyítva. (Az összehasonlítandó kettősöket a 8. ábrán zárójellel összekapcsoltuk.) A bemutatott elrendeződés-különbségekből rekonstruálhatunk egy olyan műveletet, amely egyesíti és leszármaztatja az összes Fibonacci-növényi szerkezetet. E művelet a rész-szalag eltolási (elcsúsztatási) művelet, amelyet váltakozva kell alkalmazni a kétféle rácsirányban. A műveletnek a legegyszerűbb eseténél kell elkezdődnie,



6. ábra



7. ábra

A normáláshoz vezető transzformációsorozat végeredménye minden Fibonacci számú sáv-párossal jellemezhető növényi rácsmozaikra: a lefejtett négyzet-mozaik szalag-rendszer a jobbra és a balra föltekерedő szalag-sávokkal.

ábra). Maróti I. (1980.) megmérte egy Szeged környéki napraforgó táblán a *Helianthus Maximus* balos és jobbos enantiomorf változatainak a számát és azt találta, hogy e szám a kétféle változatra megegyezik. Egy populációban a kétféle enantiomorf változat kifejlődése akkor lehetséges egyenlő számban, ha az egyedek tükörszimmetrikus kezdeti feltételekkel indulnak fejlődésükben és véletlenszerűen dől el az, hogy melyik formálódik jobbos és melyik balos enantiomorf változattá.

A sejtautomata modell – lokális átmeneti függvény

Modellünkben minden egyes sejt a Fibonacci-rácsok eddig vizsgált egy mozaikelemének felel meg. E sejtek állapotát egy szám fogja jellemezni, amely megfelel a globális modellben megadott pozíciószámoknak. Az állapotváltozást számmal jelzett sejt számmal jelzett környezetének a megváltozása fogja jelenteni. Ez esetünkben számcserekből fog megmutatkozni. A sejtekhez hozzárendelt számok – formálisan – el fognak mozdulni, úgy, ahogyan a globális modellben levezetett szomszédságváltozás megköveteli. Ehhez mégis, ebben a lokális modellünkben, az egyes sejteknek minden lépésben ugyanazt a helyi „állapotváltozást” kell végrehajtaniuk.

A Fibonacci-növények szerkezetét generáló sejtautomata modellünk tehát a következő. Kapjanak számozást meghatározott sejtek a kezdeti feltételek szerint. Esetünkben ez az 1+1-nek megfelelő tükörszimmetrikus szalagelrendezés. A sejtér állapota – alakzatrendje – lépésenként változik. A sejt környezetek változását leíró szabályok egységek minden sejtre és kétfélek lehetnek. Az első, tükörszimmetria-sértő lépés véletlensze-

vagyis az 1+1 sáv-elrendeződésénél, amely a búzakalász jólismert rácsszerkezete. Az irány szerint váltakozva elvégzett egymás utáni lépésekben azután a rész-szalag elcsúsztatási művelet leszarmaztatja (főlépíti) a magasabb Fibonacci-számú eseteket).

A tükörszimmetrikus legegyszerűbb 1+1-es rács típus egyedüliségevel sugallja önmagát, mint kezdeti feltételt a generátor művelettel történő szerkezetleíráshoz. Az ilyen típusú leírással a klasszikus mechanika módszerét alkalmaztuk: a kezdeti feltétel és a mozgásegyenlet (amely most diszkrét lépésekkel haladó művelet) ír le minden, a modellbe épített változást.

A Fibonacci-növények a Fibonacci-rácsok így leírt deformációs fejlődésének fajuk esetében a lezáró, utolsó állomását képviselik. Fibonacci-számokkal jellemezhető szerkezetük azonban másféleképpen is közvetlen kapcsolatban van a tükörszimmetrikus kezdeti feltétellel. (9. ábra) Az első rész-szalag eltolási műveletnél a kiindulási rács tükörszimmetriája megsérül. Jobbra vagy balra indítva a rész-szalag eltolási műveletet a Fibonacci-növények két, enantiomorf rácsú változata jön létre. (10.

rűen választ e kettő közül, de aztán a másik féle lépés következik és a továbbiakban a kétféle lépés váltakozva alakítja a sejteret.

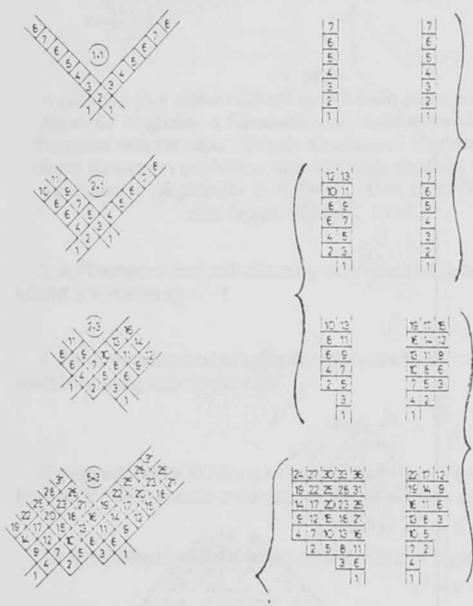
A sejtekre kirótt állapotváltoztatási utasításoknál kétféle sejteret kell figyelembe venni, mert más a működés a hengerre fölvitt és más a síkbeli „képernyőn” kiterített sejterén. A hengeres sejtautomatán a globális modell rész-szalag eltolási műveletéből a következő kétféle lépés következik végrehajtható feladatul minden egyes sejtre azonos utasításként:

1. Kapcsolódj össze az ÉK-i és a DNY-i szomszédoddal! Tekintsd az ÉNY-i szomszédodat rögzítettnek, és mozdulj el hozzá képest az ÉK-i szomszédod irányában egy rácsállandónyi távolságot! Az elmozdulás után kapcsolódj szét!

2. Kapcsolódj össze az ÉNY-i és a DK-i szomszédoddal! Tekintsd az ÉK-i szomszédodat rögzítettnek és mozdulj el hozzá képest az ÉNY-i szomszédod irányában egy rácsállandónyi távolságot! Az elmozdulás után kapcsolódj szét!

A 2. sz. utasítások megfelelnek az 1. számúnak az ÉK \rightarrow ÉNY, DNY \rightarrow DK és ÉNY \rightarrow ÉK helyettesítéssel. Ha az első, tükörszimmetriát sértő „csúsztatási” lépés az 1. számú, akkor az elmozdulás jobbra kezdődik. (11. ábra)

Összegezve a tetszőlegesen kiválasztott sejt körüli relatív mozgásokat a következőket figyelhetjük meg. Az 1. sz. utasításnál bármely sejt ÉK-i irányban mozdul el ÉNY-i szomszédjához képest. De egyúttal bármely sejt ÉNY-i szomszédja a tőle DK-re eső sejtnék, ezért az ÉNY-i sejtekhez képest DK-i sejtek 1. sz. definíció szerinti ÉK-i irányú elmozdulása megegyezik a DK-i sejtekhez képest ÉNY-i helyzetű sejtek DNY-i irányú elmozdulásával a DK-i sejtekhez viszonyítva. Az ílymódon a sejt két ellentétes oldalán létrejövő párhuzamos, de ellentétes irányú elmozdulás eredője – a henger körbezáródó felületén – a sejt elfordulása.



8. ábra

A különböző legegyszerűbb Fibonacci-növényekről lefejtett, transzformált és kettéválasztott szalagpárok. A rácsfejlesztés műveletének kiolvasásában felhasználható egyenlő szélességű szalagokat zárójellel összekapcsoltuk. A rész-szalag eltolási műveletet a számkörnyezetek összehasonlításával olvashatjuk ki belőlük.

Modellépítéseinke tanulságai

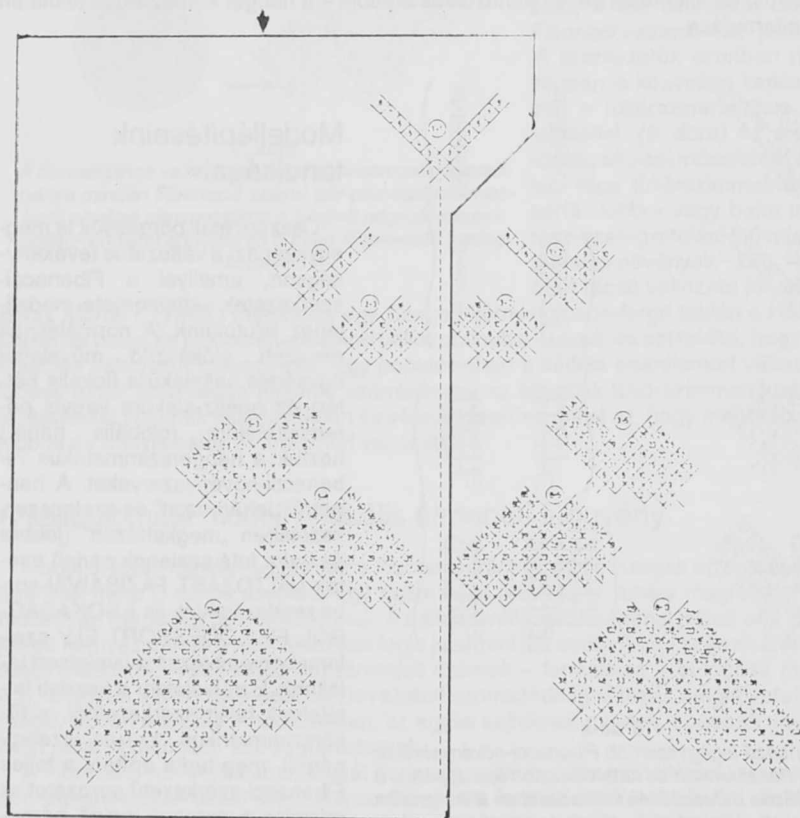
Összegezésül pörgessük le még egyszer azt a változatos tevékenységsort, amellyel a Fibonacci-szerkezetek sejtautomata modelljéhez eljutottunk. A normálásnak nevezett előkészítő művelettel egységes sejtalakúra (lokális háttér) és egész-alakúra vagyis peremfeltételűre (globális háttér) hoztuk a hengersizmetrikus Fibonacci-növénysszerveket. A hengerrel „lehámozott” és szalagszerkezetében „megkettőzött” (jobbra és balra futó szalagok párai) esetek VÁLTOZÁST FEJZISAIVAL sorba rendezésével, és a SOKASÁGBÓL FEJLÖDÉSSORT ELV szellemében építkezve műveletsort találtunk. E műveletsor a kezdeti feltételnek talált szerkezetből, a tükörszimmetrikus 1+1-es szalagpárból, meg tudta építeni a teljes Fibonacci-szerkezetű sorozatot. A művelet a sorozat tagjait páronként összekapcsoló, s így diszkrét, rész-szalag elcsúsztatási művelet

volt, melyet azután átféjtettünk sejtművelettel. Az állapotváltási sor egyes egészeit, mint globális átmeneti függvényt alkotó képernyőket így ki tudtuk egészíteni egy lokális átmeneti függvénnyel, mely minden „sejt”-re ugyanazt a transzformációs lépést jelentette. Minthogy a konstrukció iránya a globális átmeneti függvénytől vitt a lokális átmeneti függvényig, így indirekt Neumann probléma megoldást valósítottunk meg a modellépítés során. A modell ebben a formájában egy kétrétegű mozgásegyenlet is, hiszen egyszerre írja le a Fibonacci-szerkezet változását globálisan és lokálisan. Ez a fajta leírás erőteljesen kidomborította a jelenségnek azt a vonását, hogy lokálisan és globálisan össze rendezett (koherens) állapotváltozásról van szó. Ez a koherencia a peremfeltételi szimmetria (hengeres), a kezdeti feltételi rácsszimmetria (tükörszimmetrikus) és a lokális-globális rácsművelet (rácsállandónyi elcsúsztatás) hengerfelszínen Fibonacci-számokat

9. ábra

A tükörszimmetrikus 1+1 sávrendszertől (mint kezdeti feltételtől) indított rács-átépítés sorozat alternálva – előbb jobbra, majd balra, s.i.t. – végrehajtott rész-szalag elcsúsztatási művelettel építi föl a jobbra 1/2, 1/3, 2/5, 3/8, ... fillotaxisú növényi rácsokhoz rendelhető hengerfelszíni négyzet-mozaik rácsokat. E „jobbra indított” és a generátor művelettel összekapcsolt mozaik-rács családnak azonban létezik egy enantiomorf (tükörképi) párja is. Az enantiomorf családpárt a bemutatottból a bejélt tükörsíkra való tükrözéssel, vagy az első rész-szalag csúsztató lépés balra indításával nyerhetjük.

generáló összjátékában ötlük a szemünkbe. Így a jelenségben jelen levő eme invariánsok összetartozását is bizonyítja ez a sejtautomata modellben történt jelenségmegfogalmazás és állapotváltás-leírás. Eszerint a Fibonacci-számok a bemutatott mozgásegyenlet tükörszimmetrikus kezdeti feltétellel vett sajátértékei négyzet-rácsos hengeren.



10. ábra

GLOBÁLIS ÁTMENETI FÜGGVÉNY



Bb-1.

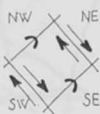
LOKÁLIS ÁTMENETI FÜGGVÉNY



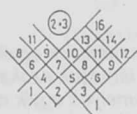
Ba-1.



Bb-2.



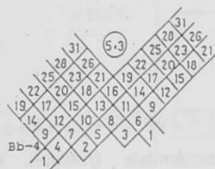
Ba-2.



Bb-3.



Ba-3.



Bb-4.



Ba-4.

11. ábra

A globális (bal oldali oszlop) és a lokális (jobb oldali oszlop) átmeneti függvény a Fibonacci-szerkezetet generáló transzformációsorozat sejtautomata szerkezetű kifejtésében, az indirekt Neumann probléma egy speciális esetében történt megoldásaként. (A globális átm.függv. – Bérczi, 1976., a lokális átm.függv. – Bérczi, 1985.)

3. A Fibonacci-sorozat valamely elemének négyzete és ezt az elemet közrefogó elemek szorzata között a különbség ± 1

$$|f_n^2 - f_{n-1}f_{n+1}| = 1$$

4. A Fibonacci-sorozat egymás után következő elemeiből képzett hányadosok sorozata az arányszám arányszámához tart:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}+1}$$

E negyedik állítást könnyen beláthatjuk, ha a Fibonacci-sorozat n -edik elemét x^n hatványalakban keressük. A Fibonacci-sorozat definíciója alapján ekkor

$$f_n = (x^n = x^{n-1} + x^{n-2}) = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Az x hatványaival felírt egyenletet rendezve ugyanahhoz az

$$x^2 = x + 1$$

egyenlethez jutunk, amelyet az egységnyi hosszúságú szakasz aránymetszésben való felosztásának x osztáspontkoordinátjára nyerünk. E másodfokú egyenlet gyökei:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Mindkét gyökkel (a gyökök hatványaival) egy általános értelemben vett Fibonacci-sorozatot nyerünk, mert az $f_1=f_2=1$ feltétel nem teljesül. De a két gyök és hatványaik (tehát a két általános Fibonacci-típusú sorozat) összevonásával a speciális $f_1=f_2=1$ feltételt is elérhetjük. Ha ugyanis az x_1 és x_2 hatványaik külön-külön sorozatot alkotva megfelelnek az $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ feltételnek, akkor az

FÜGGELÉK

A Fibonacci-sorozat néhány tulajdonsága

Általános értelemben vett Fibonacci-típusú sorozatnak nevezzük azt a számsorozatot, melynek az elemeit az

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n=2,3,4,\dots)$$

formulával nyerjük (f_n a sorozat n -edik eleme). A definícióból látható, hogy egy konkrét Fibonacci-típusú sorozatot első két elemének megadásával kapunk.

Speciálisan a valódi Fibonacci-sorozat esetében az első két elem ugyanaz a szám: 1, 1. Mi most a továbbiakban az így előálló 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ... Fibonacci-sorozat néhány érdekes tulajdonságát mutatjuk meg, de ezek közül sok átvihető az általános Fibonacci-típusú sorozatra is.

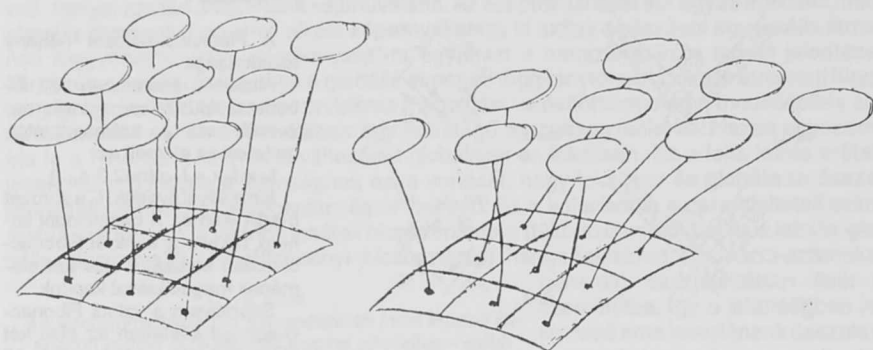
A Fibonacci-sorozat elemeire igaz a következő négy állítás:

1. A Fibonacci-sorozat első n elemének összege, S_n eggyel kevesebb a sorozat $n+2$ -ik eleménél: $S_n = f_{n+2} - 1$. (Ez az állítás könnyen belátható az elemeket definiáló egyenlőségek összegzésével.)

2. A Fibonacci-sorozat két szomszédos elemének szorzata így írható fel:

$$f_n f_{n+1} = f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2$$

(Teljes indukcióval bizonyítható.)



12. ábra

A felületi szemcsék, azaz a „sejt”-ek szerkezetét változásában leíró modellünk egyik következtetése: e növényfelszínnek kettősrétegek. E kettősréteg felső rétegén láthatjuk azokat a szalag-elcsúszási (kristálytani szakkifejezéssel diszlokációs) mozgásokat, amelyek egyik rácsszerkezetet a másikba alakítják át a növekedési deformációk során.

$$F_n = x_1^n - x_2^n$$

különbség sorozatnak is ki kell elégíteni az

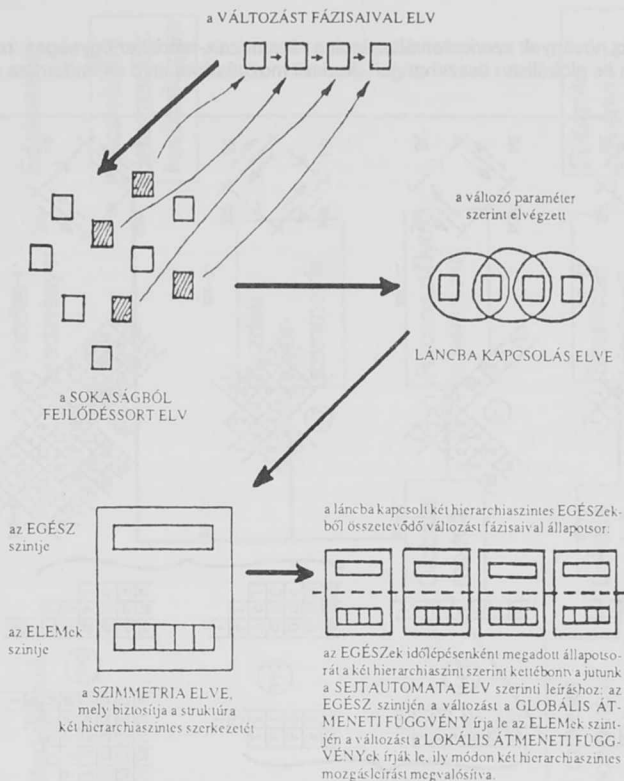
$$F_n = x_1^n - x_2^n = (x_1^{n-1} + x_1^{n-2}) - (x_2^{n-1} + x_2^{n-2}) = (x_1^{n-1} - x_2^{n-1}) + (x_1^{n-2} - x_2^{n-2}) = F_{n-1} + F_{n-2}$$

összefüggést. Az F_n sorozat első néhány elemét kiszámítva (melyek rendre: $\sqrt{5}, \sqrt{5}, 2\sqrt{5}, 3\sqrt{5}, 5\sqrt{5}, \dots$) látjuk, hogy ha $\sqrt{5}$ -tel osztjuk az F_n sorozatot, akkor a valódi Fibonacci-sorozathoz jutunk:

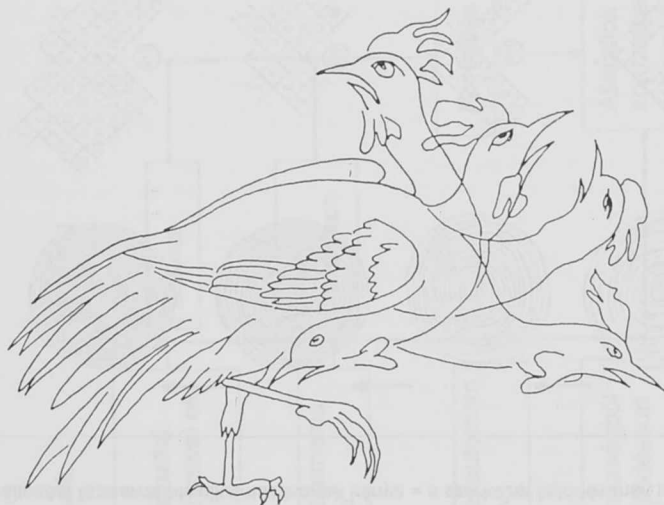
$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Befejezésül a Fibonacci-sorozat egy érdekes előállítását mutatjuk be: a binomiális együtthatókból felépülő Pascal-háromszögben a megrajzolt egyenesek mentén összegezve a Fibonacci-sort kapjuk.

			1						
		1	1						
	1	2	1						
	1	3	3	1					
	1	4	6	4	1				
	1	5	10	10	5	1			
	1	6	15	20	15	6	1		
	1	7	21	35	35	21	7	1	
	1	8	28	56	70	56	28	8	1



Összefoglalás a sejtautomata rendező elvekről



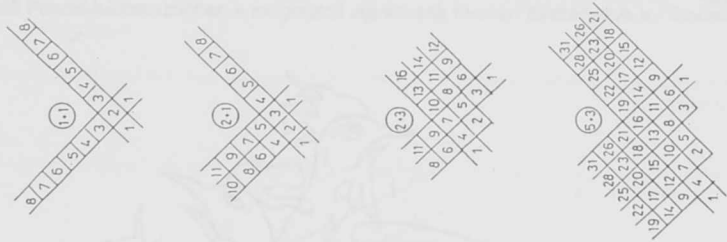
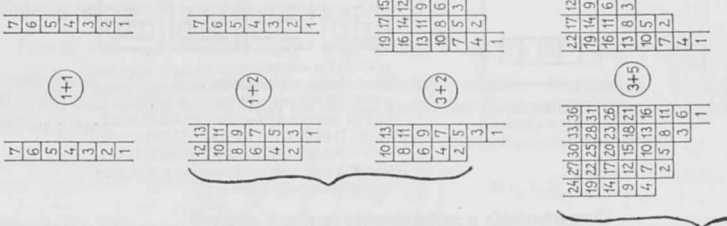
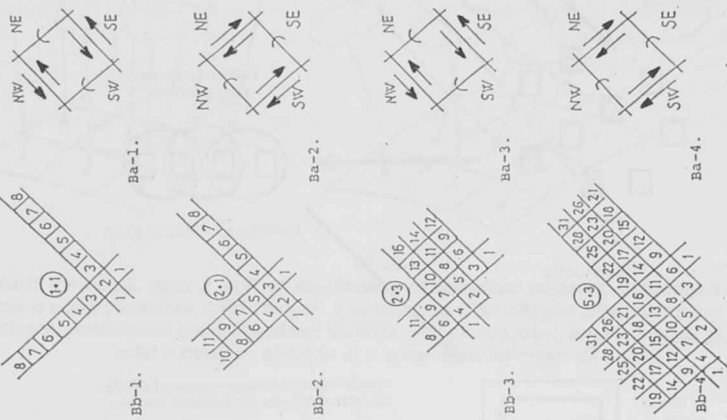
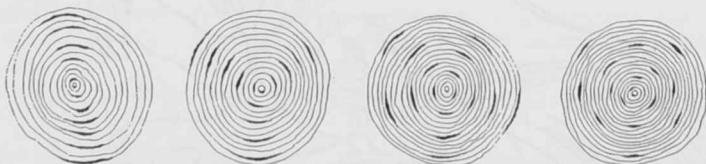
A változást fázisaival elv illusztrációja egy arab madárrajz

A Fibonacci növények szerkezetváltozásait a rácsmozaik-rendszer egységes, rendezett lokálisan és globálisan összehangolt diszkrét mozgásaival leíró sejtautomata modell

Hengerfelszíni normalizált négyzet-mozaik rácsokat fölépítő szalagrendszer

Hengerfelszíni normalizált négyzet-mozaik rácso

Fibonacci filiotaxis



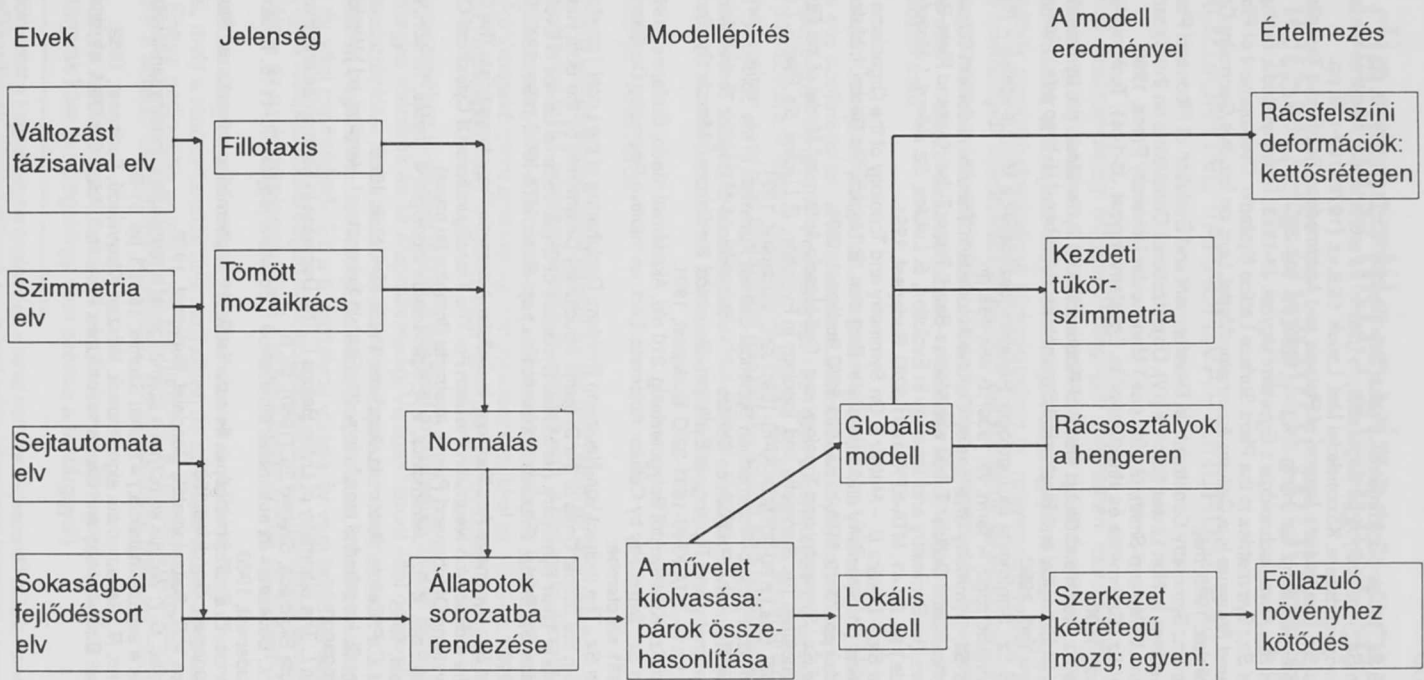
A változást fázisaival elv alkalmazásának iránya = a szerkezetet fejlődésének iránya

G. Á. F. → L. Á. F.
INDIREKT NEUMANN PROBLÉMA MEGOLDÁSA

MŰVELETKIÖLVÁSÁS

N O R M Á L Á S

Tevékenységek térképe a Fibonacci transzformációk sejtautomatákkal című cikkben.



IRODALOM

- Bérczi Sz.: Növényi szimmetriák. Fizikai Szemle. 26/2. sz. (1976) 59-62. pp.
- Bérczi Sz.: A szabályos és félgszabályos (platonai és archimedesi) testek és mozaikok periódusos rendszere. Középszkolai Mat. Lapok. 59.5.sz. (1979) 193-199. pp.
- Bérczi Sz.: The Periodic System of Platonic and Archimedean Solids and Tessellations. Acta Geologica Acad. Sci. Hung. 23. 1-4. (1980) pp. 184-200.
- Bérczi Sz.: Anyagtechnológia I. Egyetemi jegyzet. J3-1333. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.
- Bérczi Sz.: Symmetries in the Plant Surface Lattice Systems: Development of Fibonacci Numbered Structure in a Cellular Automaton Model. Lect. on Intuitive Geometry Conf. Balaton-széplak. 1985. máj.
- Bérczi Sz.: Symmetry Constraints in Development and Evolution of Fibonacci Plants. (In: Proceedings in Non Linear Science (IV). Organizational Constraints on the Dynamics of Evolution. J. Maynard-Smith, G. Vida eds.) Manchester University Press, 1990.
- Bérczi Sz.: Szimmetria és struktúraépítés. Egyetemi jegyzet. J3-1441. Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.
- Bérczi Sz.: Local and Global Model of Fibonacci Plant Symmetries. (In: Symmetries in Science IV. Biological and Biophysical Symmetries. B.Gruber, J.H. Yopp eds.) Plenum Press, New York, 1990.
- Bérczi Sz.: Szimmetria és Topológia: Rácsátrendeződések a Möbius-szalag – Tórusz transzformáció során = Term. Vil. 1990/10. 464-466. pp.
- Bérczi Sz.: Symmetry Changes by Cellular Automata in Transformations of Closed Double-Threads and Cellular Tubes with Möbius-Band, Torus, Tube-Knot and Klein-Bottle Topologies. (In: Symmetry and Topology in Evolution, B. Lukács, Sz. Bérczi, I. Molnár, Gy. Paál, Eds.) pp. 29-41. MTA-KFKI-1991-32/C. Budapest, 1991.
- Bérczi Sz. – Lukács B. – Molnár I.: On Symmetry and Topology of the Organisms in Macroevolution. (In: Symmetry and Topology in Evolution, B. Lukács, Sz. Bérczi, I. Molnár, Gy. Paál, Eds.) pp. 73-79. MTA-KFKI-1991-32/C. Budapest, 1991.
- Bérczi Sz.: Symmetry and Topology in a „Cell-Mosaic-Automata” Model of the Fibonacci-Plant Structures. (In: Symmetry and Topology in Evolution, B. Lukács, Sz. Bérczi, I. Molnár, Gy. Paál, Eds.) p.80-90. MTA-KFKI-1991-32/C. Budapest, 1991.
- Bérczi Sz.: Platonic-Archimedean Spherical Cellular Automata in the Solution of the Indirect Von-Neumann Problem on Sphere for Transformations of Regular Tessellations. (In: Symmetry and Topology in Evolution, B. Lukács, Sz. Bérczi, I. Molnár, Gy. Paál, Eds.) pp. 111-116. MTA-KFKI-1991-32/C. Budapest, 1991.
- Bérczi Sz.: Kristályoktól Bolygótestekig. 210 old. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1991.
- Bérczi Sz.: Symmetry by Cellular Automata. Lect. on Intuitive Geometry Conference. Szeged, 1991 szeptember.
- Bérczi Sz.: The Indirect Von-Neumann Problem: Deciphering of the Local Transformations from the Global Ones of the Systems Structurally Determined by the Both Hierarchy Levels of Their Symmetry. (In: Mutual Dynamics of Organizational Levels in Evolution, B. Lukács, Sz. Bérczi, E. Lábos, I. Molnár, Eds.) pp. 40-49. MTA-KFKI 1992, 32/C. Budapest, 1992.
- Bérczi Sz.: Symmetry And Topology in Cellular Automatic Transformations: The Solution Of The Indirect Von-Neumann Problem For The Transfigurations Of Cylindrical Cell-mosaic Systems Of Fibonacci Plants. Abstracta Botanica (in press)
- Boltyánszkij, V. G. – Jefremovics, V. A.: Szemléletes topológia. 4. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.
- Codd, E. F.: Cellula: Automata. Academic Press, New York, 1968.
- Gévay G.: Icosahedral morphology. (In: Fivefold Symmetry, I. Hargittai, ed.) World Scientific, Singapore.
- Maróti I.: The Symmetry of Living Beings I.: The Decrease in Simmetries and Evolution. Acta Biologica, Szeged 26. (1980). 95. p.
- Peák I.: Bevezetés az automaták elméletébe I. Egyetemi jegyzet, J3-1115. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.
- Shannon, C. E.: Számológépek és automaták. (In: A kibernetika klasszikusai, Studium (30.). Budapest, Gondolat, 1965.
- Takács V. D.: Sejtautomaták. Gondolat, Budapest, 1978.
- Vichniac, G. Y.: Vegyük komolyan a számítógépet a természettudomány tanításában. (Bevezetés a sejtautomatákba.) = Fizikai Szemle, 1986/3. pp. 81-94.
- Vollmar, R.: Sejtautomata algoritmusok. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1982.
- Wigner E.: Symmetry and Conservation Laws. Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 41. 956. p.