Additív-e az anyag mennyisége?

MARX GYÖRGY

Az anyag mennyisége az anyag minden fajtájára vonatkozó megmaradó tulajdonság és független a megfigyelőtől. Az anyagmennyiség fogalmát így érdemes kialakítani a tanulókban, de ez csak fokozatosan lehetséges.

Ha nem találom a kulcsomat, nem gondolom, hogy megsemmisült. Azt gyanítom, hogy ellopták vagy elvesztettem, de a kulcs valahol van. A tapasztalat és a tudomány azt tanítja, hogy az *anyag mennyisége megmarad.*

A hétköznapi bevásárlás gyakorlata az anyag mennyiségét a *súlya* által jellemzi. A magasabb szintű fizika-stúdiumokon azonban azt tanítják, hogy *ugyanannak* a vasdarabnak a *súlya más* és más az Egyenlítőnél, az Északi-sarkon, az űrhajóban vagy a Holdon. Ezért a fizikában a súly szerepét a tömeg vette át, mint az anyag mennyiségének mértéke. A tömeg a test *tehetetlenségét*, a *gravitációs csatolását,* sőt energiatartalmát is kifejezi a híres (de nem mindig megértett) Einstein-egyenlet értelmében:

$$E = mc^2 \qquad (1)$$

Közbevetőleg tegyük hozzá, hogy a kémiában az anyag mennyiségét a tekintett anyagdarab *molekuláinak N* (vagy moljainak *n*) *számával* értelmezik. A két szám arányos, a szorzó tényező az N_A Avogadro szám: $N = N_A \cdot n$. A fizikatanároknak töprengést okozhat, hogy az anyagmennyiség mértékeként a molekulák számát használják, mert ez a szám már az egyszerű kémiai reakciók során is változik, pl. a hidrogén égésénél:

$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$.

Ami a kémiai reakciók során megmarad, az a *barionszám,* jele *B* (a protonok és neutronok együttes száma, vagy modern megfogalmazásban a kvarkok és az antikvarkok számának különbsége osztva hárommal). Ezt a megmaradási törvényt Wigner Jenő fedezte fel 1949-ben. A barionszám azonban sok anyagfajtára nem alkalmazható. Például protonok és neutronok esetében $B = +1$, fényre és elektronra $B = 0$, az antiprotonra $B = -1$, ezért *B* univerzálisan, általánosan nem alkalmas az anyag mennyiségének és megmaradásának a kifejezésére.

"*Az anyag mennyisége megmarad, mert a tömeg és az energia megmarad*" – szoktuk mondani felületesen. A magreakciókban fellépő tömegdefektus egy pillanatra gondot okozhat, de könnyü megmagyarázni: a "hiányzó" energiát (azaz tömeget) az emittált foton viszi magával:

$n + p \rightarrow D +$ foton (2,2 MeV). (2)

A fény biztosan létezik. Megfigyelhető, energiája mérhető, alá van vetve a gravitációnak, ezért úgy kell tekintenünk, mint egy olyan anyagfajtát, amelynek van tömege és ez a tömeg számítható az (1) Einstein-féle képletből:

$m\,(\text{foton}) = E/c^2 = h\nu/c^2$ (3)

A fotonok tehetetlensége megmutatkozik a Compton-szórásban, amikor a foton elektronnal ütközik. Ha a foton tömegét figyelembe vesszük, akkor a tömegmegmaradás a (2) típusú reakciókban is teljesül. A fény anyagszerű tulajdonsága még szebben mutatkozik meg a párképződésben:

$$\text{foton} + \text{atommag} \rightarrow e^- + e^+ + \text{ugyanazon atommag} \qquad (4)$$

A foton (3) szerint számolt tömege (amikor $h\nu > 1{,}02$ MeV) az elektron és pozitron tömegévé alakult át, amelyek biztosan anyagi részecskék. A (4) megfordított reakciója

$$e^- + e^+ \rightarrow \text{fotonok.} \qquad (5)$$

Ezt a folyamatot a fizikusok konyhanyelven "annihilációnak", szó szerint megsemmisülésnek hívják, amely félrevezető. Jelenlegi felfogásunk szerint (5) nem az anyag megsemmisülése, hanem inkább a konvencionálisan stabil kondenzált anyag "elolvadása", hasonlóan egy jégkocka elolvadásához vagy egy kámforgolyó elpárolgásához. (Az (5) megnevezése németül találóbb: Zerstrahlung, ami szétsugárzást jelent.)

Úgy tűnik, eddig minden rendben is van. De újra szembetalálkozunk egy szerencsétlen kémikus kollegánkkal, aki éppen most tanulta a Doppler-jelenséget és ellenvetéseket tesz nekünk: "Napnyugtakor a Nap felé nézek. Kiszemelek gondolatban egy fotont, amely a Nap és a Föld között van. Ez a térben egyedül van, egy anyagdarabnak felel meg, a (3) egyenletet használhatjátok tömegének kiszámítására. Megindulok most autóval nyugat felé. A fény színe a Doppler-effektus szerint a kék felé tolódik, frekvenciája megnő, így a tömege is. Komolyan gondoljátok, hogy ennek az anyagdarabnak a mennyisége megnőtt a távoli térben – többmillió kilométer távolságban – attól, hogy megnyomtam az autóm gázpedálját?" Az ellenvetés jogos. A relativitás elmélete szerint az m tömeg nem skalár, hanem a megfigyelő és az objektum viszonylagos v sebességétől függ a jól ismert egyenlet szerint:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (6)$$

Így *ugyanazon tárgynak* a tömege attól függ, ki nézi. A csattanót az adja, hogy a (6) képletet kísérletileg ellenőrizték! Az (1) alapegyenletnél ezt fel kell használni, mert egy test (egy részecske) energiája megnő, ha nagyobb lesz a sebessége:

$$E = m_0 \frac{c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0 c^2 + E_{kin} \qquad (7)$$

A sebesség fogalma tömegpontra alkalmazható, de ilyen csak a klasszikus mechanika tankönyveinek szövegében létezik.

E történelmi érdekességű aggály után tekintsünk meg közelebbről egy anyagdarabot a modern fizika nézőpontjából. Tekinsünk a vákumban egy reális "anyagfelhőt" (egy eleketronfelhőt, egy fényhullámcsomagot, egy galaxist), amelyet egyetlen sebességérték nem jellemez. Tegyük fel, hogy azt nem befolyásolják a környező felhők, hanem egyedülálló sziget a távoli térben.

A tapasztalat azt tanítja, hogy a természet törvényei *mindenkor* ugyanolyan formában érvényesek, nem tartalmazzák az időt expliciten (amelyet például az Univerzum keletkezésének pillanatától számítunk). Amikor a mozgásegyenletet alkalmazzuk, akkor teljesen mindegy, mikor indítottuk a stopperórát. Az egyenletekben (mint például d^2x/dt^2) csak *időkülönbségek* szerepelnek. *A természet szimmetriája az idő kezdőpillanatának kiválasztása tekintetében* matematikailag maga után vonja, hogy elszigetelt rendszerekben megmarad egy E mennyiség, ezt a mennyiséget *energiának* nevezzük (Noether-tétel). A relativitáselmélet szerint a t idő megfigyelőtől függő

mennyiség, következésképpen E is ilyen. Röviden: *az izolált rendszerekben az energia megmarad, de értéke függ attól, melyik megfigyelő nézi.*

A tapasztalat szerint a természet törvényei *mindenütt* ugyanolyan formában érvényesek; expliciten nem tartalmazzák a három dimenzió x térkoordinátáit, csak a koordinátadifferenciákat, mint például d^2x/dt^2, esetleg x_2-x_1. (A mozgásegyenletek alkalmazásánál mindegy, melyik pont a világegyetem centruma. Tehetetlenségi vonatkoztatási rendszerem origóját bárhol megválaszthatom.)

A Természet törvényeinek szimmetriája a háromdimenziós vonatkoztatási rendszer origójának kiválasztása tekintetében matematikailag maga után vonja, hogy az izolált rendszerekben három mennyiség megmarad (Noether-tétel). Készíthetünk egy háromdimenziós $\boldsymbol{P}$ vektort, amelyet *lendületnek* (mozgásmennyiségnek, impulzusnak) nevezünk. Röviden: *izolált rendszerekben a lendület megmarad.*

Egy átszámítási faktor alkalmazásával, amelyet történelmi okokból $c = 299792500\ \mathrm{m\ s^{-1}}$-nek választunk, definálhatjuk az m tömeget az

$$m = E/c^2 \tag{8}$$

egyenlet szerint. Ez megmarad, mint az E energia, de a megfigyelőtől függő mennyiség. A $\boldsymbol{P}$ segítségével bevezethetünk egy *sebesség* jellegű mennyiséget is.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{P}/m = c^2\boldsymbol{P}/E \tag{9}$$

De ez a sebesség esetleg a rendszer egyetlen anyagi pontjának sebességével sem fog megegyezni. Úgy tekinthetjük $\boldsymbol{v}$-t, mint a tömegközéppont sebességét. A relativisztikus rendszerben a *tömegközéppont* azonban furcsa módon a vonatkoztatási rendszer választásától függ, ezt most nem részletezzük. Összpontosítsuk figyelmünket az eredeti E és $\boldsymbol{P}$ megmaradó mennyiségekre, amelyek a téridő homogenitásának kövekezményeként megmaradó tulajdonságúak.

A relativitás elmélete szerint a t idő és x koordináták a megfigyelő által választott vonatkoztatási rendszertől függenek, de képezhető egy négyesvektor a $dx, dy, dz, icdt$ mennyiségekből, amelynek vannak megfigyelőtől független tulajdonságai, pl.

$$ds^2 = \sum_{\mu=1}^{4} dx_\mu^2 = d\boldsymbol{x}^2 - c^2 dt^2$$

a megfigyelőtől független skalár. A tér és idő zéruspontjának kiválasztásával szemben megmutatkozó szimmetria maga után vonja, hogy a P_x, P_y, P_z és $(i/c)E$ mennyiségek egy négyesvektort állítanak elő, P_μ-t ($\mu = 1,2,3,4$), amelynek az a tulajdonsága, hogy

$$\sum_{\mu=1}^{4} P_\mu^2 = \boldsymbol{P}^2 - E^2/c^2 = \text{skalár} \tag{10}$$

a megfigyelőtől függetlenül.

Válasszunk egy speciális vonatkoztatási rendszert, amelyben $\boldsymbol{P} = 0$ (mivel $\boldsymbol{v} = 0$ is igaz, így ezt tömegközépponti rendszernek nevezzük). Ebben a speciális rendszerben az energiát (1) szerint Mc^2-nek is jelölhetjük és M-et *nyugalmi tömegnek* nevezzük.

Mivel a (10) minden vonatkoztatási rendszerben ugyanaz, értékét a tömegközépponti rendszerben is számíthatjuk, amelyben értéke $-M^2c^2$, ezért:

$$\sum_{\mu=1}^{4} P_\mu^2 = -M^2c^2$$

Ezt az egyenletet tekinthetjük az M skalár mennyiség definíciójának:

$$M = c^{-1}\left(-\sum_{\mu=1}^{4} P_\mu^2\right)^{1/2} = c^{-2}\left(E^2 - c^2\boldsymbol{P}^2\right)^{1/2} \qquad (11)$$

Egyszerűen szólva M a tömeg abban a speciális rendszerben, amelyben az izolált relativisztikus rendszernek nincsen impulzusa. M megmarad, mert $\boldsymbol{P}$ és E megmarad. M független a megfigyelőtől, mert P_μ a definíciója szerint négyesvektor.

Geometriailag szólva az anyagot voltaképp nem egy *skalárral*, hanem *négyesvektorral* érdemes leírni, amely a mozgását is kifejezi.

A lendület négyesvektor M mérete (hossza) jelzi az anyagmennyiséget, iránya (az egységvektor $u_\mu = P_\mu/M$) adja a téridőben a mozgás irányát. A mozgás mindig a jövő irányában történik (u_μ a jövőbeli fénykúpba irányul), P_μ időszerű négyesvektor, ezért

$$\sum_{\mu=1} P_\mu^2 = \boldsymbol{P}^2 - E^2/c^2 < 0 \qquad (12)$$

ezért

$$|\boldsymbol{v}| = c^2|\boldsymbol{P}|/E < c \qquad (13)$$

ami jól ismert a relativitáselmélet elemeiből, még véges méretű hullámcsomagokra is. (Végtelen síkhullámok csak a fizikakönyvekben vannak.)

Összehasonlítva a (11) és (12) egyenleteket látható, hogy M minden anyagdarabra pozitív. Vegyünk példának okáért a kozmikus sugárzásból egyetlen protont, amely a Földhöz közeledik, mondjuk 0,995 c sebességgel. Energiája

$$E = m_p c^2/\sqrt{1 - v^2/c^2} = 10 \text{ GeV},$$

lendülete

$$\boldsymbol{P} = \left(E/c^2\right)\boldsymbol{v} = m_p\boldsymbol{v}\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

nyugalmi tömege

$$M = c^{-2}\left(E^2 - c^2\boldsymbol{P}\right)^{1/2} = m_p$$

a tapasztalat szerint mindig ugyanaz a mennyiség. (m_p = 1,6725x10^{-27} kg a hidrogénmag nyugalmi tömege.)

A (11) nyugalmi tömeg, akárcsak a P_μ lendület négyesvektorának négy komponense minden izolált anyagdarabra megmaradó tulajdonságú és független a választott inerciarendszertől. $M > 0$ minden anyagdarabra. Egy konvencionálisan makroszkopikus anyagdarabot tekintve megegyezik azzal, amit a hétköznapi értelemben tömegnek nevezünk.

Egy kiszemelt atomi részecskére nézve M fix érték, amely a fizikai állandók táblázatában szerepel. A nyugalmi tömeg fogalma univerzálisan felhasználható (a piacon, az asztronomiában, a nagyenergia fizika laboratóriumaiban). Ezért arra következtethetünk, hogy *a nyugalmi tömeg az anyag mennyiségének alkalmas mértéke.*

Ez a következtetés maga után von egy mélyebb jelentést is. M megmaradása a P_μ megmaradásából következik, és ez a megmaradási elv pedig annak az empirikus ténynek egyenes matematikai következménye, hogy az anyag mozgását leíró törvények minden időben és helyen ugyanazok. *A tapasztalat szerint az anyag nemcsak mennyiségében, hanem tulajdonságaiban is megmarad.*

További érdekes következmények is vannak. Tekinsünk két távoli anyagszigetet, amelyek nem érintkeznek és nincsenek kölcsönhatásban egymással. A teljes energia és lendület az energiák és lendületvektorok összegével megegyezik:

$$E = E(1) + E(2);\ \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(1) + \boldsymbol{P}(2) \qquad (14)$$

Az egész rendszer nyugalmi tömege (11)-ből nyerhető:

$$M = c^{-2}\{[E(1)+E(2)]^2 - c^2[\boldsymbol{P}(1) + \boldsymbol{P}(2)]^2\}^{1/2},$$

amely nem egyszerűen a két anyagsziget

$$M(1) = c^{-2}[E(1)^2 - c^2\boldsymbol{P}(1)^2]^{1/2},$$

$$M(2) = c^{-2}[E(2)^2 - c^2\boldsymbol{P}(2)^2]^{1/2}$$

tömegeinek összege, hanem

$$M = [M(1)^2 + M(2)^2 + 2c^{-4}E(1)E(2) - 2c^{-2}\boldsymbol{P}(1)\boldsymbol{P}(2)]^{1/2}.$$

Hogy megmagyarázzuk a negatív tagot, térjünk át az egyik anyagsziget tömegközépponti rendszerére. $\boldsymbol{P}(2)=0$ és $E(2)=M(2)c^2$, ezért:

$$M = [M(1)^2 + M(2)^2 + 2c^{-4}E(1)E(2)]^{1/2}$$

amely csak akkor egyezik meg az alkotók nyugalmi tömegének összegével, ha $E(1)=M(1)c^2$, azaz ha az anyagszigetek nyugalomban lennének egymáshoz képest. Egyébként látható, hogy:

$$E(1) > M(1)c^2,$$

és ezért

$$M > M(1) + M(2) \qquad (15)$$

Mit jelent ez? Képzeljünk el egy kozmikus sugárzásban levő nagyenergiájú protont millió mérföldnyi távolságban a Föld felé repülve (energiája $E(1) = m_pc^2 + E_{kin}$, ahol $E_{kin} > 6$ GeV), amelyik összeütközhet egy, a Föld atmoszférájában gyakorlatilag nyugalmi helyzetű protonnal, amelyiknek energiája tehát $E(2) = m_pc^2$. Számítsuk ki a két proton együtteséből álló rendszer tömegét, amelyek most egymástól 1 millió mérföldre vannak!

$$M = 2\,m_p(1+ E_{kin}/2m_pc^2)^{1/2} > 4\,m_p.$$

Egy proton meg egy proton több, mint négy proton tömegű. Nem képtelenség ez? Egyáltalán nem! Várjunk egy pillanatig! A két proton ütközik és lehet, hogy a keletkező tűzlabdában egy *további proton-antiproton pár keletkezik!*

Kozmikus sugárzásban, de gyorsítókban is megfigyelték már, hogy két részecske ütközése során akár száz új részecske is keletkezhet, Rubbia és Van Meer Nobel-díjat kaptak 1984-ben azért, mert egy proton-antiproton ütközés során 100 proton tömegénél is nagyobb tömegű új részecske keletkezését figyelték meg. Ez az úgynevezett Z-részecske, amelynek létezését Glashow, Salam és Weinberg megjósolta 1979-ben az elektrogyenge-elméletben, amelyért szintén Nobel-díjat kaptak.

Eredeti egyszerű kérdésünk oda vezetett (és tanulóinkat is lehetőleg vezessük oda), hogy megértettük: *az anyag mennyisége elválaszthatatlan annak mozgásától.* Ezért az anyagot alkalmasan nem az Mtömegével, hanem $\boldsymbol{P}_\mu$ lendület négyesvektorával lehetséges leírni. Az idő nem választható el a tértől, ezért a tömeg sem a lendülettől. A Természet törvényei mindenütt és mindenkor érvényesek, ezért a lendület négyesvektora bármely elszigetelt rendszerben megmarad. A téridő oksági szerkezete (indefinit metrikája) miatt két négyesvektor összegének hossza nagyobb lehet, mint a komponensek hosszának összege. Ezt a különös *interferenciát* észleltük *részecskék keletkezéseként* a világegyetem keletkezésekor, a nagyenergiájú fizika laboratóriumaiban, az űrben.

Mindezeket lehetetlen lenne megérteni a klasszikus mechanika vagy klasszikus kémia korlátozott keretei között, ahol az anyagi pontok, oszthatatlan atomok, "elemi" részecskék modelljei bilincsbe verik az anyag belső szabadsági fokait.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A szerző köszönettel tartozik a Dudley Observatory-nak, amiért elnyerte a Dudley professzorságot, amely e munka létrejöttét lehetővé tette.

HIVATKOZÁS

WIGNER, E.P.: *Proc. Am. Phil. Soc.* 93,56.
MARX, G.: *European Journal of Physics* 12 (1991) 271-274. (Bristol). (Itt jelent meg e tanulmány eredeti angol változata.)