Van-e legkisebb?

SZABÓ ÁRPÁD

Az itt következő rövid történeti visszapillantás igazában az olvasóra bízza a kérdés megválaszolását. Válasz helyett inkább csak arra próbál rávilágítani, hogyan merült föl a probléma, "van-e legkisebb?", a matematikának mint tudománynak a hajnalán.

Érdemes lesz kiindulnunk abból, hogy milyen gondolatmenet vezetett el egykor a régi "atom" fogalom megteremtéséhez. Az 'atom' szó azt jelenti: "oszthatatlan". Az a görög filozófus, aki először használta ezt a fogalmat, úgy gondolta: osztani annyit jelent, mint megtalálni és kitágítani azt az ürességet, amely különben is megvan valamely anyag részei között. Amikor szétvágok valamit, akkor tulajdonképpen csak kitágítom azt a "semmit", ami amúgyis ott van az egyes részek között. Volt valami részeket egymástól elválasztó "üres" az osztás, a szétvágás előtt is, ha ezt nem is tapasztalhattuk közvetlenül érzékszerveinkkel. Az osztás, a vágás csak elkülöníti egymástól az anyag részeit. Ha pedig vég nélkül folytathatnók az osztás, a vágás műveletét, akkor ez azt jelentené, hogy mindig csak üreset találnánk a részek között. Akkor igazában csak az "üres" lenne, és nem lenne anyag. Ezért kell olyan legkisebb résznek lennie, amely már nem osztható tovább, ez az atom.

Ez a régi atom, tehát, mint "legkisebb", filozófiai, spekulatív fogalom. Ez a felfogás mindenesetre azt állítja: van legkisebb az anyagi világban.

Érdekes egyébként, hogy még századunk elején is volt komoly természettudós, aki ezt a régi "atom" fogalmat csak munkahipotézisnek tartotta, de egyáltalán nem volt meggyőződve az atom reális létezéséről. Ma viszont az atom már régen nem "oszthatatlan" a szó eredeti értelmében. Ma már beszélünk az atomnak egyre kisebb részecskéiről, például a neutrinóról. Dehát van-e akkor valami utolsó legkisebb, aminél kisebb már semmi sem lehet? Vagy csak ez idő szerint, ma még legkisebb a neutrino, de lehet valami még ennél is kisebb? Ne próbáljunk még felelni erre a kérdésre! Inkább vegyük szemügyre azt a másik tudományt, amely határozottan tagadja a legkisebb létezését. Ez a tudomány a geometria.

De bocsássunk itt előre néhány szót az antik matematikáról, mindenekelőtt három időrendi megállapítást.

1. A matematikának mint tudományos rendszernek legrégibb összefoglalója, Euklidész i. e. 300 körül írta az "Elemeket".

2. Platón, akinek egyik műve utal egy olyan matematikai felismerésre, amelyről alább szó lesz, nála korábban, i. e. 427-347 között élt. Tudtak tehát a görögök az említendő matematikai fölismerésről már Platón előtt is.

3. Az a Proklosz viszont, akinek Euklidész-magyarázata útbaigazít majd, az i. sz. 5. században működött.

Szögezzük le mindjárt azt is, hogy a matematika mint rendszeres tudomány a görögöknél főként a geometria és nem aritmetika volt. Az euklidészi "Elemek" 13 könyvéből csak három (a 7., 8. és 9.), szinte csak kiegészítésül és mellékesen tárgyalja az artimetikát. Meglepő ez azért, mert Proklosz rangsorolása szerint – és ez nyilván az egész ókor rangsorolása is – az első helye a matematikán belül mégis a számok tudományát, az artimetikát illeti meg. Az elvi rangsorolásban a geometriának be kell érnie a második hellyel.

Proklosz meg is okolja, miért van ez így. Szerinte a számoknak kevesebb közük van az érzékelhető anyagi világhoz, mint a térbeli alakzatoknak. A számok tehát úgyszólván tisztábbak, mint az anyagtól alig elválasztható mértani idomok. Ha számokról van szó; az osztás csak bizonyos korlátok között végezhető el. Mert a számok között van legkisebb ami már nem osztható. Ez a "legkisebb", aminek vég nélkül folytatható megismétléséből a számok összeállnak, az egy. Mert a görög artimetika elmélete nem fogadta el a törteket. A törtet inkább felbontotta két szám egymáshoz való viszonyára (arányra). A számot és az egyet viszont olyasvalaminek tartotta, amit csak elgondolni lehet. Ezért az egy – a görög artimetika szerint – szigorúan oszthatatlan, nincsenek részei.

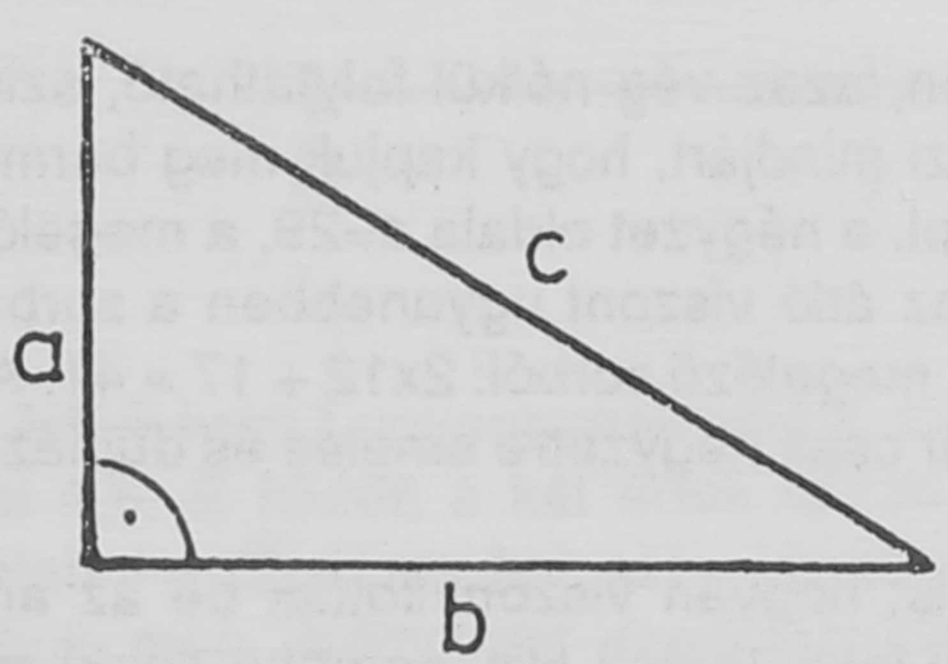
Ezzel szemben a geometriáról azt állítja Proklosz, hogy ebben nincs legkisebb. Ehhez a megállapításhoz mindjárt hozzáfűzi azt is: "ahol pedig az osztás vég nélkül folytatható, ott jelen van az elgondolhatatlan, az alogon is".

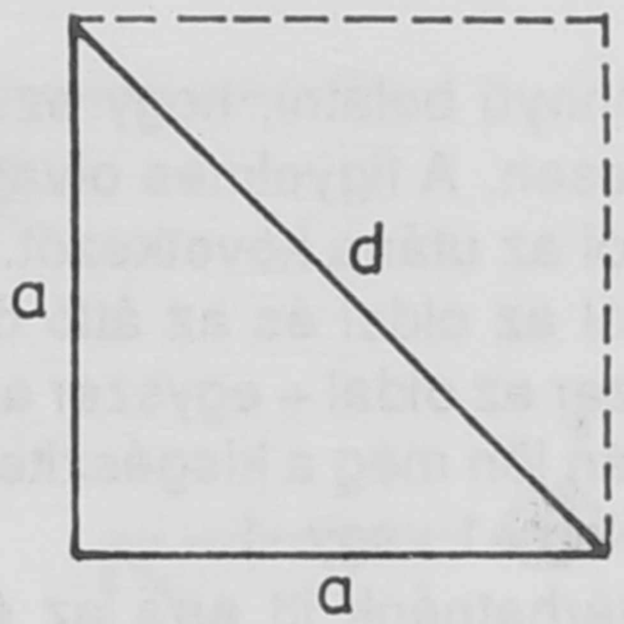
Erre a fölismerésre a görögök nyilván az összemérhetetlenség, az inkommenzurabilitás felfedezése során jutottak el. Bár nincsenek közvetlen forrásaink arra vonatkozóan, hogyan ment végbe ez a felismerési folyamat, nem lesz nehéz rekonstruálnunk azokat a lépéseket, amelyeknek eredményeit antik szövegek is rögzítik.

Ismeretes volt a derékszögű háromszögekkel kapcsolatban az ún. Pythagoras-tétel több egyszerű esete már réges-régen a görögök előtt is. Ha pl. az ilyen háromszög két befogója, $a=3$ és $b=4$, akkor ennek az átfogója $c=5$ lesz.

Mert a befogókra emelt négyzetek területének összege egyenlő az átfogó négyzetével, $3^2 + 4^2 = 5^2$. A három szám, 3, 4 és 5 a legegyszerűbb pythagorasi számhármas. Régen tudták azt is, hogy nagyon sok (végtelenül sok) ilyen számhármas van. – De vajon hogyan érvényesül a Pythagoras-tétel a négyzet esetében?

Hiszen ha meghúzzuk valamely négyzet átlóját (d), akkor ez a négyzetet két derékszögű háromszögre bontja. A különbség az előbbi esettel (3, 4, 5) szemben csak annyi, hogy a megfelezett négyzet esetében az egyik háromszög két befogója azonos: a. De nyilván érvényes a Pythagoras-tétel ebben az esetben is: a befogóra emelt négyzetek összege egyenlő az átfogóra – ezúttal a négyzet átlójára – emelt nagyobb négyzettel: $2a^2 = d^2$.





A kérdés csak az, milyen szám jelölhetné a négyzet átlójának (d) a hosszúságát, ha az oldal hosszúsága valamely a szám? Erre a kérdésre – abban a speciális esetben, ha a négyzet oldala $a=1$ – így felelünk mi: d pedig $\sqrt{2}$. (A görögök viszont ezt úgy fejezték ki: a négyzet oldala (a) és átlója (d) két összemérhetetlen mennyiség. Mert bármilyen szám legyen is a, nem mérhető ugyanannak a számnak az egységeivel d. Nincs olyan parányi egység, amellyel maradéktalanul megmérhetnénk d-t, ha előzőleg megmértük a-t. Ha viszont fordítva: d-t mérjük meg valamilyen egységekből álló számmal, akkor a lesz hozzámérhetetlen.

Mielőtt összehasonlítanánk ezt a kérféle megfogalmazást, vegyük most azt az esetet, amely feltűnt a görögöknek már a Platón előtti korban. Mekkora lesz a négyzet átlójának a hosszúsága, ha az oldal a=5? A válasz erre az kell legyen: d valamivel nagyobb lesz mint 7. Mert ebben az esetben – a Pythagoras-tétel szerint – a befogókra emelet négyzetek összege: $2a^2 = 2x5^2 = 50$. Ha viszont a 7-et négyzetre emeljük, csak 49-et kapunk. Ebben esetben tehét a közelítő átló azért 7, mert ennek a négyzetéhez még hozzá kell adnunk 1-et, hogy megkapjuk a befogókra emelt két négyzet összegét. – De vegyünk most egy másik esetet. Legyen ezúttal a négyzet oldala a=12. Mekkora lesz most a négyzet átlója? Minthogy az oldal kétszeres négyzete ezúttal $2a^2 = 2x12^2 = 288$, az átló olyan szám kell legyen, amelynek négyzete legalább közeljár a 288-hoz. Ilyen szám a 17, mert $17^2 = 289$. Csakhogy ez a szám eggyel több, mint ami nekünk kellene. A keresett átló tehát valamivel kisebb mint 17, mert ehhnek a négyzetéből (289) egyet le kell vonnunk (-1), hogy megkapjuk az oldal kétszeres négyzetét ($2a^2 = 288$).

Tudták a görögök már a Platón előtti korban azt is, hogy összeállítható nagyon sok olyan négyzet, amelynek átlója megközelíthető valamely egész számmal. Csakhogy az ilyen négyzetek átlójára emelt négyzet mindig eggyel kisebb vagy nagyobb, mint az oldal kétszeres négyzete.

Figyeljük meg az alábbi táblázatot! Jelentsen az I. oszlop négyzetoldalakat (a); a II. ugyanabban a négyzetek "közelítő átlóit" (d); a III. az oldalak kétszeres négyzeteit ($2a^2$), a IV. pedig a közelítő átlók négyzeteit (d^2). Amint az V. oszlopból látjuk, a közelítő átlók négyzeteihez hol hozzá kell adnunk egyet, hol meg le kell vonnunk belőle ugyanezt, hogy megkapjuk az oldalak kétszeres négyzetét.

a	d	2a2	d2	
1	1	2	1	+1
2	3	8	9	-1
5	7	50	49	+1
12	17	288	289	-1
29	41	1682	1681	+1
70	99	9800	9801	-1
169	239	57122	57121	+1
408	577	332928	332929	-1
...				

Könnyű belátni, hogy ez a táblázat végtelen, azaz vég nélkül folytatható, szinte gépiesen. A figyelmes olvasó azt is észreveszi mindjárt, hogy kapjuk meg bármely sorból az utána következőt. Az ötödik sorban pl. a négyzet oldala a=29, a megelőző sorból az oldal és az átló összege (12+17); az átló viszont ugyanebben a sorban: kétszer az oldal + egyszer az átló ugyancsak a megelőző sorból: 2x12 + 17 = 41. Ami ezután jön még a kiegészítendő sorban, az már csak négyzetre emelés és duplázás, illetőleg +1 vagy -1.

Kitérhetnénk itt arra az érdekes kérdésre is: hogyan viszonyították be az antik matematikusok, hogy ez a táblázat végtelenül folytatható? Hiszen soha senki még olyan "végtelen táblázatot" nem csinált, amelynek minden egyes tagját csakugyan előállította volna! De hagyjuk most a matematikai bizonyítás elméleti kérdését! Inkább alakítsuk át az előbbi táblázatot a következőképpen. Álljon az I. oszlopban mindenütt a vizsgált négyzet átlója (d), a II-ban meg az oldala (a); a III. oszlop legyen a kettőnek egymáshoz való viszonya (d:a); a IV. meg az előbbi arány tizedes törtté alakítva! (Igaz, az ókoriak nem ismerték a tizedes törteket. De mi megengedhetjük magunknak ez a pusztán technikai újítást, mert ez – mint majd látni fogjuk –

egyszerre jobban megvilágítja számunkra annak a táblázatnak az értelmét, amelyet antik szövegek útbeigazítása nyomán állítottunk össze.)

	d	a	d:a?	
(1)	1	1	1:11	1
(2)	3	2	3:2	1.5
(3)	7	5	7:5	1.4
(4)	17	12	17:12	1.41666...
(5)	41	29	41:29	1.4137931...
(6)	99	70	99:70	1.4142857...
(7)	239	169	239:169	1.41422011...
(8)	577	408	577:408	1.41422156...

Ha ezek után figyelmesen megnézzük a tizedes törteket a IV. oszlopban, mindjárt feltűnnek a következők.

1. A legkisebb számot az első sorban, a legnagyobbat pedig a másodikban találjuk: 1 és 1,5. A harmadik sortól kezdve a tizedes törtek mind e két érték közé esnek. Az első két sor tehát két szélső értéket mutat.

2. Észrevesszük azt is, hogy a páratlan sorokban (3, 5, 7 ...) olvasható értékek mindig kisebbek, mint a közvetlen előttük álló páros sorok (2, 4, 6 ...) értékei.

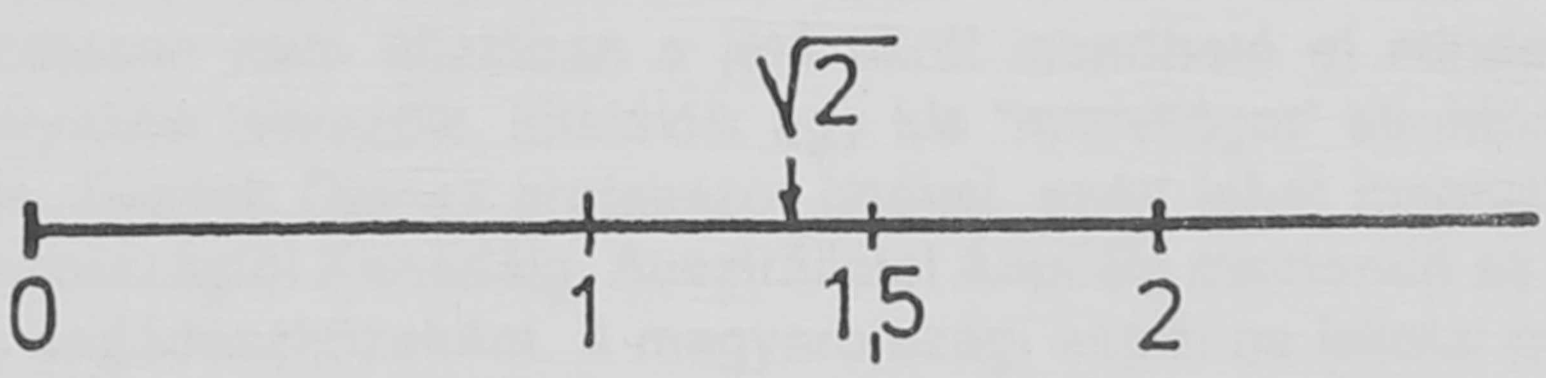
3. A páratlan sorokban tehát növekednek, a párosakban pedig csökkennek a törtek.

4. A növekedés és a csökkenés, úgy látszik, egy közbülső érték felé tart.

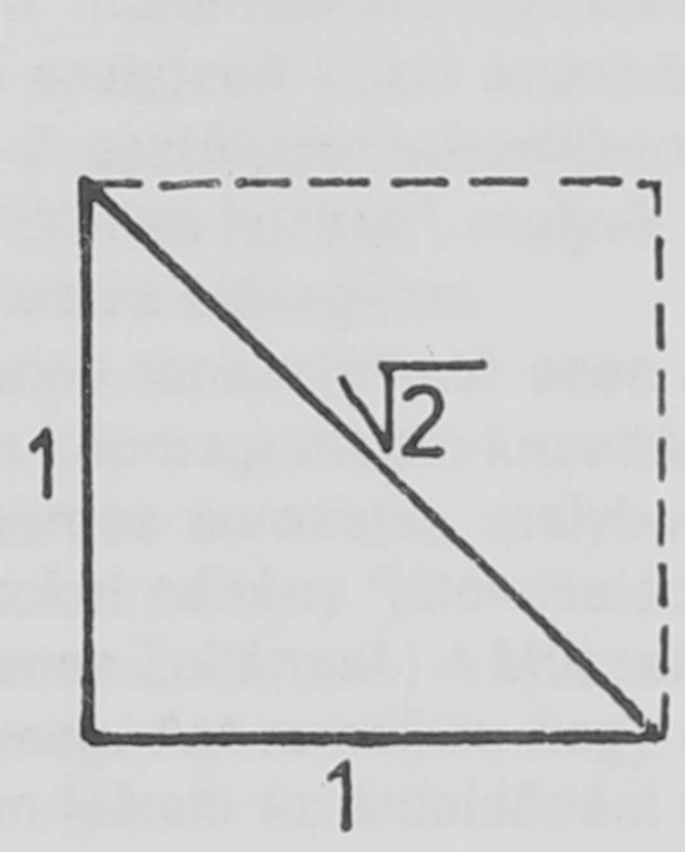
Csakugyan, ha kiszámítjuk a $\sqrt{2}$ értékét – hét tizedesig –, ezt kapjuk: 2 = 1,4142135 ... Persze, a $\sqrt{2}$ igazában végtelen tizedes tört. De mi itt most beérjük a hét tizedesig terjedő pontossággal.

A tizedes törtek a IV. oszlopban tehát a $\sqrt{2}$ egyre pontosabb értékei. De mit jelent akkor az a tény, hogy első táblázatunk végtelenül folytatható? – Ez azt jelenti, hogy a $\sqrt{2}$ értékét – mint a matematikus mondaná – tetszőleges pontossággal megadhatjuk ugyan, de bármilyen sokszámjegyű törtet, vagy tizedes törtet veszünk is, ez mindig valamivel nagyobb vagy kisebb lesz, mint $\sqrt{2}$, egyik sem lesz pontosan $\sqrt{2}$.

De akkor tán nem is tudnánk megszerkeszteni a $\sqrt{2}$-t, mint geometriai pontot? Dehogyisnem. Legyen egy tetszőleges hosszúságú szakasz az 1 geometriai képe.



Adjuk hozzá ugyanennek a felét; ez lesz a geometriai 1,5. E között a két érték között helyezkedik el valahol a $\sqrt{2}$. Hogy hol, azt a következőképpen állapítjuk meg. Négyzetet szerkesztünk az egységnyi szakasszal



Majd körzőnyílásba vesszük a megszerkesztett négyzet átlóját, és rámérjük ezt a távolságot számegyenesünkre. E szakasz végpontja – az 1 és az 1,5 között – lesz a $\sqrt{2}$ geometriai képe. Ott van tehát ez a pont valahol a számegyenesünkön. Meg is közelíthetjük ezt törtekkel – jobbról vagy balról, felülről vagy alulról, de soha el nem érhetjük.

Ha pedig ezek után azt érdezzük: "Van-e legkisebb?" – úgy látszik, erre a kérdésre különös, bizonyos válasz kívánkozik. A geometria szerint nincs legkisebb. Mert az osztás gondolatban vég nélkül folytatható. Hiszen a pont az, aminek nincs része, és nincs két szomszédos pont. Mert bármilyen közel legyen is egymáshoz két pont, még mindig végtelenül sok további pont lesz a kettő között. De mintha ez a válasz csak a gondolatot tekintve lenne igaz. És ugyan milyen értékben "tükrözi" gondolkodásunk a fizikai, az anyagi valóságot?

Mert még óvatosabb választ kell adnunk, ha a fizikai, az anyagi valóságra vonatkozik a feltett kérdés. Az anyagi valóságban az osztás nem folytatható vég nélkül. Ez bizonyos határon – jóllehet ez a határ időben korántsem állandó – érzékszerveink vagy műszereink, eszközeink felmondják a szolgálatot, és így elérkezünk valami "legkisebbhez". Igaz, az így megtalált "legkisebb" még sohasem bizonyult véglegesnek. Elvben tehát megvan a lehetősége annak, hogy túljussunk a pillanatnyilag elért legkisebben. És akkor újra felmerül a kérdés: vajon nincs-e valami még ennél is kisebb?